



Unimontes

Universidade Estadual de Montes Claros

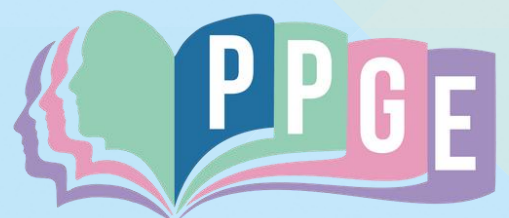
Uma abordagem didática interativa e visual no ensino de Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas

Pedro Aurélio Cardoso da Silva

Mestrado em Educação

Montes Claros / MG

2025



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Universidade Estadual de Montes Claros
Centro de Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Educação

**Uma abordagem didática interativa e visual no
ensino de Mudança de Coordenadas em Integrais
Múltiplas**

Pedro Aurélio Cardoso da Silva

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora do
Programa de Pós-Graduação em Educação como
exigência parcial para obtenção do título de Mestre em
Educação, linha de pesquisa Educação Matemática.*

Orientadora: Prof. Dra. Janine Freitas Mota

Montes Claros / MG

2025



A divulgação ou reprodução total ou parcial desta dissertação é autorizada exclusivamente para fins acadêmicos e científicos.

S586a SILVA, Pedro Aurélio Cardoso da.
Uma abordagem didática interativa e visual no ensino de Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas [manuscrito] / Pedro Aurélio Cardoso da Silva — Montes Claros (MG), 2025.
123f. : il.

Inclui Bibliografia

Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes), Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE), 2025

Orientadora: Profa. Dra. Janine Freitas Mota

1. Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. 2. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 3. Cálculo Integral. I. Mota, Janine Freitas. II. Universidade Estadual de Montes Claros. III. Título.

Catálogo Biblioteca Central Professor Antônio Jorge



Universidade Estadual de Montes Claros
Centro de Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Educação

Uma abordagem didática interativa e visual no ensino de Mudança de Coordenadas em
Integrais Múltiplas

Pedro Aurélio Cardoso da Silva

Dissertação defendida e aprovada em 21 de fevereiro
de 2025, pela banca examinadora constituída pelas
pesquisadoras e pesquisadores

Profa. Dra. Janine Freitas Mota — Orientadora
Universidade Estadual de Montes Claros

Prof. Dr. Gilberto Januario
Universidade Estadual de Montes Claros
Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. João Bosco Laudares
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Genilson Soares de Santana
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia



Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pela bolsa concedida.



Dedico este trabalho a minha esposa, Maria Leticia Fernandes Santos (in memoriam) e a minha mãe, Maria Alessandra Cardoso da Silva (in memoriam).



Agradeço a minha querida orientadora, Dra. Janine Freitas Mota, pelo acolhimento, carinho, cuidado, paciência e dedicação na construção do nosso trabalho.

Aos membros da banca de Qualificação e Defesa de Dissertação: Dr. Gilberto Januario, Dr. João Bosco Laudares e Dr. Genilson Soares de Santana, pela dedicação de seu tempo e pelas contribuições.

Aos professores do PPGE que tive a oportunidade de frequentar suas aulas: Dra. Francely Aparecida dos Santos, Dra. Geisa Magela Veloso, Dr. Edson Crisostomo dos Santos, Dr. Josué Antunes de Macêdo, Dr. Lailson dos Reis Pereira Lopes e Dra. Mônica Maria Teixeira Amorim, pela grandiosidade de seus ensinamentos.

Às professoras, Dra. Rieuse Lopes Pinto e Dra. Galvina Maria de Souza, pelas contribuições nos seminários de dissertação.

A minha família, pelo apoio e compreensão.

Agradeço a minha querida esposa, Leticia, por todo apoio incondicional nos dias mais difíceis e por ter me ensinado sobre gentileza, ternura e doçura.

A Deus pelo dom da vida, pela presença e proteção.



SILVA, Pedro Aurélio Cardoso da. *Uma abordagem didática interativa e visual no ensino de mudança de coordenadas em integrais múltiplas*. 2025. 123f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Centro de Ciências Humanas. Universidade Estadual de Montes Claros. Montes Claros / MG. Brasil.

RESUMO

A pesquisa se insere no campo de investigação da Educação Matemática, tendo como objetivo geral *investigar como uma abordagem pedagógica, fundamentada nos pressupostos dos Registros de Representação Semiótica e apoiada pelo GeoGebra, pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, no contexto do Cálculo Integral*. Norteados pelo objetivo geral, construímos os seguintes objetivos específicos: i) Analisar o emprego de Tecnologias Digitais no ensino de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, em produções acadêmicas, com foco nas dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem; ii) Analisar dificuldades evidenciadas por estudantes, a partir de um teste diagnóstico, na mudança de registros de representação semiótica em tarefas que envolvem Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas; e iii) Analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação, sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. Para o referencial teórico, nos reportamos à Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Como referencial metodológico foram utilizados aportes da Engenharia Didática, em que foi realizada revisão de literatura e pesquisa de campo, com teste diagnóstico e sequência de tarefas aplicados a estudantes da Unimontes do 5º ao 8º período da Licenciatura em Matemática. Os resultados evidenciam que o GeoGebra potencializa a visualização de regiões de integração, permitindo que os estudantes explorem as relações e compreendam os limites de integração e as mudanças de coordenadas. Entretanto, os desafios persistem, principalmente na conversão entre registros gráficos e algébricos, mostrando que a mediação pedagógica pode ajudar a incluir essas ferramentas ao processo de aprendizagem. Comparando os resultados do teste diagnóstico com a análise das tarefas realizadas, observou-se uma evolução no entendimento dos conceitos matemáticos, mas também a necessidade de revisões mais frequentes e direcionadas às dificuldades prévias dos estudantes. Conclui-se que a combinação entre TRRS e o uso de Tecnologias Digitais pode favorecer a aprendizagem, permitindo uma transição mais fluida entre os registros de representações semióticas. No entanto, os dados analisados indicam que a superação das dificuldades relacionadas à conversão entre registros gráficos e algébricos demanda um acompanhamento pedagógico mais estruturado. Além disso, aspectos como a infraestrutura tecnológica disponível e a formação docente para o uso desses recursos podem influenciar diretamente na qualidade dessa abordagem no ensino de Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.

Palavras-chave: Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Cálculo Integral.



SILVA, Pedro Aurélio Cardoso da. *An interactive and visual didactic approach to teaching coordinate changes in multiple integrals*. 2025. 123f. Dissertation (Master in Education) — Centro de Ciências Humanas. Universidade Estadual de Montes Claros. Montes Claros / MG. Brasil.

ABSTRACT

The research falls within the field of Mathematics Education, with the general objective of investigating how a pedagogical approach, based on the assumptions of Semiotic Representation Registers and supported by GeoGebra, can contribute to the teaching and learning processes of Changes of Coordinates in Multiple Integrals, in the context of Integral Calculus. Guided by the general objective, we constructed the following specific objectives: i) To analyze the use of Digital Technologies in the teaching of Changes of Coordinates in Multiple Integrals, in academic productions, focusing on the difficulties reported on the teaching and learning processes; ii) To analyze difficulties evidenced by students, based on a diagnostic test, in the change of semiotic representation registers in tasks that involve Changes of Coordinates in Multiple Integrals; and iii) To analyze knowledge mobilized by students when solving a sequence of tasks, which uses different representation registers, on Changes of Coordinates in Multiple Integrals. For the theoretical framework, we refer to Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Records (TRRS). As a methodological framework, contributions from Didactic Engineering were used, in which a literature review and field research were carried out, with a diagnostic test and sequence of tasks applied to Unimontes students from the 5th to the 8th period of the Mathematics Degree. The results show that GeoGebra enhances the visualization of integration regions, allowing students to explore relationships and understand integration limits and coordinate changes. However, challenges persist, mainly in the conversion between graphic and algebraic records, showing that pedagogical mediation can help include these tools in the learning process. Comparing the results of the diagnostic test with the analysis of the tasks performed, an evolution in the understanding of mathematical concepts was observed, but also the need for more frequent reviews aimed at the students' previous difficulties. It is concluded that the combination of TRRS and the use of Digital Technologies can favor learning, allowing a more fluid transition between the registers of semiotic representations. However, the analyzed data indicate that overcoming the difficulties related to the conversion between graphic and algebraic registers requires more structured pedagogical support. In addition, aspects such as the available technological infrastructure and teacher training for the use of these resources can directly influence the quality of this approach in teaching Change of Coordinates in Multiple Integrals.

Keywords: Change of Coordinates in Multiple Integrals. Theory of Registers of Semiotic Representation. Integral Calculus.



SUMÁRIO

Introdução	12
Apresentação da pesquisa.....	13
Aproximação com o Tema.....	13
Dificuldades no Ensino e na Aprendizagem do Cálculo.....	15
Design Metodológico.....	19
Estrutura da Dissertação.....	23
Artigo 1: Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Mudanças de Coordenadas: uma análise no contexto do Cálculo Integral	27
1.1 Introdução.....	27
1.2 Metodologia.....	30
1.3 Análise.....	35
1.3.1 Tecnologias Digitais.....	36
1.3.2 Teorias e Metodologias de Ensino.....	38
1.3.3 Dificuldades Cognitivas e Didáticas.....	40
1.3.4 Falta de Pré-requisitos.....	42
1.3.5 Resultados de Aprendizagem.....	44
1.4 Considerações finais.....	45
1.5 Referências.....	48
Artigo 2: Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas: uma proposta didática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica	50
2.1 Introdução.....	50
2.2 Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.....	52
2.3 Contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.....	56
2.4 Metodologia: Engenharia Didática.....	59
2.5 Análise das Resoluções do Teste Diagnóstico.....	63
2.6 Integração entre Evidências Teóricas e Resultados Empíricos nos Processos de Ensino e de Aprendizagem de Mudança de Coordenadas.....	70
2.7 Considerações finais.....	73
2.8 Referências.....	74

Artigo 3: O papel dos registros de representação na Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.....	77
3.1 Introdução.....	77
3.2 Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.....	80
3.3 Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Educação Matemática.....	83
3.4 Metodologia.....	87
3.5 Análise.....	93
3.6 Considerações finais.....	104
3.7 Referências.....	106
Considerações	109
Apêndices.....	113
Apêndice 1: Prefácio.....	113
Apêndice 2: Atividade Diagnóstica.....	116
Apêndice 3: Sequência de Tarefas.....	118
Apêndice 4: Questionário Final.....	123



INTRODUÇÃO

A pesquisa relatada nesta dissertação foi idealizada e desenvolvida na Linha de Pesquisa *Educação Matemática*, do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE), da Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes). As discussões aqui apresentadas permeiam o referido campo de conhecimento, evidenciando a Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas e utilizando as contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS), de Raymond Duval (2009), como referencial teórico e a Engenharia Didática (ED), de Artigue (1996), como referencial metodológico.

A pesquisa passou pela análise e aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da Unimontes, tendo sido considerada aprovada conforme parecer consubstanciado sob a indicação nº 6.238.670, de 14 de agosto de 2023, e Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) nº 72823723.5.0000.5146, por respeitar os preceitos éticos da pesquisa envolvendo seres humanos. A aprovação pelo CEP, de acordo com o parecer, é de que a proposta possui mérito e relevância científica, podendo contribuir para o avanço do conhecimento.

Neste capítulo inicial, abordamos os objetivos, a problemática e os pressupostos da pesquisa. Em seguida, exploramos a motivação pela escolha do tema, seguida pela descrição da metodologia utilizada e a organização da dissertação.

Apresentação da pesquisa

Com o intuito de discutir e compreender os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, de forma específica, no que se refere à Mudança de Coordenadas, delimitamos como:

Objetivo Geral: Investigar como uma abordagem pedagógica, fundamentada nos pressupostos dos Registros de Representação Semiótica e apoiada pelo GeoGebra, pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, no contexto do Cálculo Integral. Tal objetivo, foi desmembrado nos seguintes:

Objetivos Específicos: (i) Analisar o emprego de Tecnologias Digitais no ensino de

Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, em produções acadêmicas, com foco nas dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem; (ii) Analisar dificuldades evidenciadas por estudantes, a partir de um teste diagnóstico, na mudança de registros de representação semiótica em tarefas que envolvem Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas; e (iii) Analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utilizam diferentes registros de representações, sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.

Aproximação com o Tema

A escolha do tema de pesquisa surgiu quando eu¹ estava cursando a Licenciatura em Matemática na Unimontes, entre os anos de 2018 e 2022, quando fui despertado para o potencial da área de conhecimento da Educação Matemática. Esta área não apenas oferece oportunidades para a experimentação de estratégias criativas e inovadoras nos processos de ensino e de aprendizagem, mas também desempenha um papel crucial no desenvolvimento de habilidades do século XXI, como o pensamento crítico, a resolução de problemas, o uso de Tecnologias Digitais. A Educação Matemática permite integrar diferentes campos do saber, promovendo uma abordagem interdisciplinar que torna o aprendizado mais relevante e significativo para os estudantes.

Além disso, meu interesse pelo Cálculo Diferencial e Integral também se intensificou, sobretudo no que diz respeito ao Cálculo de Funções Reais de Várias Variáveis, considerando que nele há propriedades, relações e procedimentos para resolver problemas complexos em diversas áreas do conhecimento, como a Física, a Engenharia e a Economia. A escolha do tema de Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas, dentro do Cálculo, se justifica pela sua relevância na resolução de problemas práticos nessas áreas. A técnica de Mudança de Coordenadas permite simplificar expressões, tornando os cálculos mais acessíveis para suas resoluções. Sem essa técnica, a resolução de um problema pode exigir manipulações algébricas complexas ou a manipulação de integrais que, na forma original, são excessivamente complexas. Por exemplo, ao lidar com simetrias circulares ou esféricas,

¹ Nesta seção, é importante ressaltar que utilizarei a primeira pessoa do singular. Estas linhas refletem experiências pessoais que despertaram meu interesse em estudar o tema apresentado.

trabalhar diretamente em coordenadas cartesianas pode resultar em equações com difícil resolução. No entanto, ao mudar para coordenadas polares ou esféricas, essas mesmas equações podem se tornar mais simples, expondo padrões e soluções que estavam ocultos na representação inicial. Assim, compreender e dominar essa técnica é importante para qualquer estudante ou profissional que deseja explorar o emprego do Cálculo em situações concretas e multidisciplinares.

No decorrer da Licenciatura, tive a oportunidade de conhecer o aplicativo GeoGebra e perceber o quanto ele pode ser útil para o ensino dos mais diversos conteúdos matemáticos. Ao pesquisar sobre o seu uso no ensino do Cálculo, encontrei trabalhos que apresentam sua potencialidade, como pode ser observado nos trabalhos de Bezerra (2015), Cometti (2018) e Ferreira (2021). Esses estudos evidenciam que o GeoGebra proporciona uma abordagem visual e interativa para o ensino e a aprendizagem do Cálculo, permitindo que os estudantes manipulem gráficos, explorem funções e visualizem relações com diferentes variáveis.

Para além da minha graduação, a continuidade dos meus estudos na área de Educação Matemática se deu com a minha inserção no Mestrado, no qual fui acolhido na linha de pesquisa Educação Matemática. Durante o cumprimento dos créditos, disciplinas como *Didática e Metodologia de Ensino de Matemática*, bem como *Tecnologias e Mídias Digitais em Educação Matemática* foram importantes para estruturar e ampliar minha visão sobre o tema. Essas disciplinas me permitiram entender sobre como as Tecnologias Digitais podem ser integradas ao ensino do Cálculo, oferecendo novas possibilidades de ensino e de aprendizagem que antes não eram viáveis em contextos mais tradicionais.

Paralelamente, minha participação no *Grupo de Pesquisa em Educação Matemática — GPEMAT*, vinculado ao Departamento de Ciências Exatas da Unimontes, foi essencial para amadurecer as minhas ideias e delimitar o foco da pesquisa. Nesse ambiente colaborativo, tive a oportunidade de discutir com outros pesquisadores sobre os desafios e as oportunidades do ensino de Matemática, especialmente no que tange ao emprego de Tecnologias Digitais, como o GeoGebra, e as metodologias de pesquisa que poderiam ser adotadas para a pesquisa. Essas discussões me ajudaram a compreender melhor as dificuldades enfrentadas pelos estudantes no aprendizado de Cálculo e como a Sequência de Tarefas, aliada a recursos tecnológicos e a TRRS, podem ser uma estratégia para superar essas barreiras. Desse modo, o Mestrado e a inserção no grupo de pesquisa GPEMAT não só ampliaram meu conhecimento, mas também

contribuíram com a escolha pelo tema, permitindo que eu o abordasse com mais propriedade e segurança.

Ao longo da minha trajetória acadêmica, desde a graduação até o Mestrado, ficou evidente o quanto o ensino de Cálculo, particularmente no que se refere ao uso de técnicas como a Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas, pode ser desafiador tanto para estudantes quanto para professores. Apesar do potencial transformador de Tecnologias Digitais, como o GeoGebra, na visualização e compreensão desses conceitos complexos, é necessário reconhecer os problemas que ainda persistem nos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo. Na próxima seção, são abordadas as principais dificuldades enfrentadas por estudantes ao se depararem com esses conteúdos, discutindo como essas dificuldades podem ser mitigadas pela abordagem didática com os recursos tecnológicos.

Dificuldades no Ensino e na Aprendizagem do Cálculo

Pesquisas indicam que disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior, particularmente em cursos de Matemática e Engenharia, enfrentam altas taxas de reprovação e retenção. Essas dificuldades podem ser influenciadas por múltiplos fatores, incluindo lacunas na formação matemática dos estudantes na Educação Básica, conforme discutem Rodrigues e Neves (2019); Macêdo e Gregor (2020) e desafios relacionados à abordagem didática adotada pelos professores no Ensino Superior. A falta de uma base matemática sólida contribui significativamente para o baixo desempenho e, em alguns casos, leva à evasão do curso (Rosa *et al.*, 2023). Além disso, hábitos e rotinas de estudos insuficientes dos estudantes para a disciplina são identificados como fatores que afetam seus resultados de aprendizagem (Pessoa, Araujo e Sousa, 2019). Ademais, muitos professores que assumem essas disciplinas carecem de formação específica em metodologias voltadas para o ensino de Cálculo, o que pode impactar na forma como os conteúdos são abordados em sala de aula. Além disso, a ausência de estratégias pedagógicas que considerem as dificuldades dos estudantes tornam o aprendizado ainda mais desafiador. Os resultados destes estudos destacam a necessidade de intervenções direcionadas e alternativas metodológicas para melhorar o ensino de Cálculo e diminuir a retenção de estudantes em instituições de Ensino

Superior.

Nesse contexto, Mota (2021) aborda as dificuldades enfrentadas por estudantes no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, destacando que tais desafios transcendem o contexto brasileiro, refletindo um fenômeno global. Segundo a autora, o Cálculo, apesar de sua relevância na modelagem e resolução de problemas em diversas áreas, apresenta complexidades que dificultam a aprendizagem. As dificuldades surgem de diversos fatores, incluindo a natureza abstrata da disciplina e a predominância de métodos algébricos que, muitas vezes, desconsideram a busca por significados. A autora enfatiza que a insuficiência na mobilização de conhecimentos prévios e na capacidade de abstração, bem como a ausência de abordagens que integrem aspectos gráficos e analíticos, contribuem para a elevada taxa de reprovação e dificuldades no desenvolvimento de habilidades específicas necessárias para a compreensão do Cálculo. Mota (2021) ainda discute a importância de práticas didáticas que utilizem Tecnologias Digitais para melhorar a formação inicial de professores e promover uma abordagem mais compreensiva e significativa do ensino do Cálculo. Isso também havia sido defendido por Irias *et al.* (2011, p. 5), em período anterior:

Assim, acredita-se que uma possível solução para reduzir as reprovações dos alunos na disciplina de Cálculo I seria a utilização pelo professor de uma metodologia diferenciada afim de que a mesma supra a indisponibilidade dos alunos para se dedicar integralmente à disciplina.

As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral possuem um *status* de importância nos cursos em que estão inseridas, fornecendo ferramentas necessárias como, por exemplo, limites, derivadas e integrais que são fundamentais para entender o comportamento de funções às quais modelam situações e fenômenos da Engenharia, de contextos de Matemática Aplicada e da própria Matemática, que são importantes para o bom desempenho do estudante nas demais disciplinas do curso, conforme ressalta Fonseca (2012, p.43):

É fato que, apesar da reconhecida importância da disciplina de Cálculo nos currículos, muitos são os problemas com o seu ensino: aulas extremamente expositivas e formais; apresentação de uma Matemática pronta, levando os alunos à memorização de fórmulas; resolução de múltiplos exercícios, resultando em um processo mecânico de aprendizagem; alunos com defasagem na aprendizagem dos ensinamentos fundamental e médio, comprometendo a habilidade de abstração; dificuldade de operações com o infinito; pouco entendimento do conceito de limite e de convergência.

Alguns estudantes têm mostrado dificuldades nas disciplinas que envolvem o conteúdo

do Cálculo Diferencial e Integral, especialmente pela falta de visualização, o que dificulta a formação dos diversos conceitos, sobretudo quanto ao aspecto geométrico. As considerações de Mendes, Pereira e Proença (2020, p. 22) abordam uma das principais fragilidades das disciplinas de Cálculo:

I: dificuldades quanto à falta de conhecimento sobre o conteúdo matemático da educação básica pelos licenciandos; II: dificuldades apresentadas pelos licenciandos em comunicar suas ideias a respeito do conteúdo matemático trabalhado; III: dificuldade no entendimento dos problemas pelos estudantes; e, IV: dificuldades relativas ao tempo, referentes à realização das atividades pelos licenciandos e ao desenvolvimento da abordagem de ensino.

A representação de uma figura tridimensional no plano é uma tarefa que pode se tornar desgastante a depender do sólido geométrico em estudo, além de que essa representação dificilmente seria fiel a ponto de o estudante conseguir perceber as relações ali existentes, sem a necessidade de um nível de abstração mais elevado. Compreender e empregar elementos de Mudança de Coordenadas em Integrais Triplas é uma tarefa complexa sem a ajuda de um aplicativo de geometria dinâmica.

Uma possibilidade para contornar essa situação seria integrar a experimentação no estudo dos conceitos e propriedades relacionadas aos objetos matemáticos. Com a experimentação, os estudantes podem explorar tais objetos visualmente e manipular dados reais ou representações gráficas para compreender conceitos do Cálculo. Essa experimentação pode ser incorporada com Tecnologias Digitais, conforme afirmam Borba e Penteadó (2010, p. 37): “conteúdos desenvolvidos com a ajuda de *softwares* computacionais, além de trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação”.

Com a rápida evolução da tecnologia, os aplicativos digitais têm se tornado elementos essenciais no cenário educacional, oferecendo novas perspectivas e oportunidades no processo de aprendizagem. Diante dessa perspectiva, o GeoGebra² se apresenta como um aplicativo versátil, capaz de integrar Álgebra, Geometria e Cálculo, proporcionando uma abordagem

² O GeoGebra é um *software* livre que se caracteriza como um ambiente computacional de geometria dinâmica e álgebra. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter. Está disponível em www.geogebra.org

dinâmica e interativa, com potencial de colaboração, sobretudo, no que diz respeito à visualização de figuras geométricas para o ensino e aprendizagem de Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.

Segundo Teorias Construtivistas, como proposto por Piaget (1970) e Vygotsky (1978), a aprendizagem é um processo ativo e construtivo, no qual os estudantes constroem o conhecimento ao interagir com o ambiente e os recursos disponíveis. Nesse contexto, a incorporação de Tecnologias Digitais no ensino do Cálculo proporciona a criação de ambientes de aprendizagem que buscam promover a construção ativa do conhecimento. A abordagem dinâmica e interativa do GeoGebra alinha-se com essa perspectiva, permitindo que os estudantes explorem conceitos matemáticos de maneira visual e participativa.

A utilização do aplicativo de Geometria Dinâmica pode oferecer uma abordagem diferenciada ao ensino e estudo de gráficos resultantes da modelagem de fenômenos tecnológicos em simulações, em comparação com a manipulação de expressões e procedimentos algébricos. Esse aplicativo pode auxiliar na percepção da relação entre Álgebra e Geometria existente quando na Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas, conforme é destacado por Bezerra (2015).

Quando exploramos os conceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no contexto do GeoGebra, encontramos uma necessidade de utilizar uma diversidade de representações para compreender e manipular um objeto matemático, como as Integrais Múltiplas. A interligação entre esses registros é importante para a compreensão e construção do conhecimento relativo às integrais. Nesse sentido, o GeoGebra desempenha um papel importante, pois facilita a visualização e articulação das operações semióticas, especialmente ao trabalhar com representações algébricas e gráficas (Cometti, 2018).

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) busca analisar e compreender como o conhecimento é construído, dentro de uma abordagem cognitiva, em que a pessoa interage com diversos elementos presentes no processo educativo (Duval, 2003). Essa teoria concentra-se na complexidade cognitiva do pensamento humano e nas numerosas relações que as representações têm na compreensão da Matemática. Duval (2009) enfatiza que há dificuldades no estudo de fenômenos, sem recorrer às noções de representação. Segundo ele, as representações vão muito além de simples ferramentas de comunicação, desempenhando um papel fundamental na construção do entendimento matemático, seja

conceitual, seja na manipulação algébrica.

Conforme discutido por Duval (2003), a maior complexidade na aprendizagem da Matemática reside no fato de que os objetos matemáticos não possuem existência física tangível. Portanto, o acesso a esses objetos só é viável com a utilização de sistemas semióticos. Na Matemática, mais do que em qualquer outra disciplina, a diversidade de sistemas semióticos é fundamental para a formação de novos conceitos.

Design Metodológico

A pesquisa utiliza uma abordagem qualitativa que, segundo Minayo (2014), busca compreender e interpretar fenômenos complexos, muitas vezes envolvendo a subjetividade e a compreensão dos significados atribuídos pelos estudantes. Essa abordagem é amplamente utilizada em estudos educacionais. Ela permite explorar as experiências, acompanhar o desenvolvimento dos estudantes em relação ao uso do recurso computacional, bem como compreender os significados que eles atribuem às Mudanças de Coordenadas e às relações algébricas envolvidas nesse processo.

Para estruturar a investigação, adotamos aspectos da Engenharia Didática de Artigue (1996) cuja concepção teve origem no campo da Didática da Matemática, com influência francesa, nos primeiros anos da década de 1980, com o intuito de enfatizar uma abordagem específica no ensino. A Engenharia Didática adota uma abordagem cuidadosa na organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa, abrangendo desde a teoria até a prática experimental. Essa habilidade de integrar a pesquisa (aspecto teórico) com a prática educativa (aspecto experimental) é destacada como uma das vantagens distintivas dessa metodologia de investigação.

Artigue (1996) descreve que nessa forma de trabalho, o papel do professor/pesquisador é

[...] comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos muito mais complexos do que os objectos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de

que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar (p. 193).

Artigue (1996) ressalta, adicionalmente, que a Engenharia Didática se distingue pela documentação dos estudos realizados e pelo método de validação adotado. A diferença entre as pesquisas que adotam a Engenharia Didática e outras abordagens experimentais em ambientes educacionais reside principalmente no modelo de validação empregado.

De acordo com Artigue (1996), a Engenharia Didática consiste em quatro fases que não necessariamente seguem uma sequência linear. Em certos momentos, é necessário que os elementos sejam articulados e até mesmo superpostos para uma melhor condução do processo. São elas:

- a) *Análises Prévias*: esta fase inicial tem como objetivo entender o contexto do ensino do conteúdo específico, investigando o ensino tradicional e as dificuldades enfrentadas pelos estudantes. Artigue enfatiza a importância de identificar obstáculos epistemológicos e didáticos que podem interferir na aprendizagem dos estudantes. Durante essa fase, o pesquisador coleta informações sobre as práticas de ensino vigentes e os desafios cognitivos e metodológicos associados ao conteúdo em questão. Essa análise serve como base para desenvolver intervenções didáticas mais eficazes;
- b) *Concepção e da Análise a Priori*: nesta fase, o pesquisador define e elabora as tarefas que serão utilizadas, baseando-se nas análises preliminares. Artigue destaca a importância de uma análise a priori, em que se antecipa como os estudantes podem interagir com as tarefas propostas, prevendo suas possíveis reações e dificuldades. A Análise a Priori envolve a identificação das variáveis de comando que serão manipuladas e a formulação de hipóteses sobre o comportamento dos estudantes durante o desenvolvimento das tarefas. Essa fase é importante para a construção de um dispositivo didático que promova o desenvolvimento do conhecimento matemático de forma estruturada e intencional;
- c) *Experimentação*: fase referente à implementação das tarefas concebidas na fase anterior. Segundo Artigue, é fundamental observar e registrar como os estudantes interagem com as tarefas e ajustar o dispositivo didático conforme necessário. Durante a experimentação, os estudantes têm contato com situações-problema que exigem o emprego de conceitos matemáticos, e o pesquisador coleta dados com

observações, gravações, registros escritos e outros métodos. Essa fase é dinâmica e pode requerer ajustes contínuos para atender às necessidades emergentes dos estudantes;

- d) *Análise a Posteriori e Validação*: após a experimentação, realiza-se a análise a posteriori, na qual os dados coletados são cuidadosamente examinados e comparados com as previsões feitas na análise a priori. Artigue enfatiza que essa fase permite validar ou refutar as hipóteses iniciais, identificar o que funcionou e o que precisa ser ajustado. A Análise a Posteriori oferece uma compreensão sobre como as tarefas influenciaram a aprendizagem dos estudantes e fornece subsídios para futuras intervenções. Este processo de validação é essencial para garantir que as conclusões e recomendações sejam baseadas em evidências concretas e reflitam as realidades observadas durante a experimentação.

Com base nesses pressupostos e visando atender às necessidades específicas da pesquisa, adaptamos as fases propostas por Artigue (1996). Dessa forma, descrevemos as quatro fases, detalhadas a seguir:

- a) *Estudo Preliminar*: nessa fase foi feito um levantamento bibliográfico com o objetivo de analisar o emprego de Tecnologias Digitais no ensino de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, em produções acadêmicas, com foco nas dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem.
- b) *Desenho*: com base nas dificuldades identificadas na etapa anterior, foi elaborado e implementado um teste diagnóstico, com o intuito de identificar dificuldades ou reafirmar aquelas indicadas pela literatura na primeira fase, elaboração de sequência de tarefas com base no teste diagnóstico, indicando os comportamentos esperados dos estudantes e as intenções do professor;
- c) *Implementação*: realização da sequência de tarefas, observações das interações entre os estudantes, entre o professor e os estudantes, entre os estudantes e o uso dos recursos didáticos, além do desenvolvimento de um teste final;
- d) *Avaliação*: realizada mediante comparação entre o teste diagnóstico e o teste final

e a análise das respostas da sequência de tarefas, além disso foram observados os comportamentos dos estudantes durante a fase de implementação.

Com o intuito de alcançarmos o objetivo específico que constitui o estudo referente ao Artigo 1, realizamos uma Revisão Sistemática de Literatura segundo os pressupostos de Ramos, Faria e Faria (2014), abordando o tema da pesquisa. Nesse processo, empenhamo-nos na análise dos trabalhos selecionadas no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT) e na *Scientific Electronic Library Online* (SciELO), com o objetivo de consolidar uma visão abrangente sobre o tema. Neste artigo, ocorreu a primeira fase, o estudo preliminar.

Partindo do objetivo que norteia o estudo referente ao segundo artigo, descrevemos e discutimos um teste diagnóstico, elaborado de acordo com as dificuldades na aprendizagem relatadas no primeiro artigo, com o intuito de identificar qual o nível de aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo. De acordo com os resultados do teste diagnóstico foi elaborada uma sequência de tarefas, apresentada no terceiro artigo. Esse artigo corresponde à segunda fase, desenho.

Já para o Artigo 3, discutimos a implementação da sequência de tarefas produzida após o teste diagnóstico, comparando seus resultados. Este artigo abrange as últimas duas fases, experimentação e avaliação. Logo, uma parte da pesquisa envolveu a revisão sistemática da literatura e a outra parte envolveu a pesquisa de campo com a participação de estudantes da Unimontes.

Os participantes da pesquisa são estudantes do 5º ao 8º período da Licenciatura em Matemática da Unimontes, todos envolvidos em atividades inerentes ao projeto de ensino do Laboratório de Educação Matemática (Labemat). A seleção dos participantes foi realizada pela professora-orientadora, que optou por uma amostragem intencional, conforme a definição de Minayo (2014). Essa técnica consiste em selecionar pessoas que possuem características específicas, neste caso, a conclusão da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, que abrange conteúdos que são temas centrais da pesquisa, conforme identificado em sua ementa³, como integração dupla, integração tripla e Mudança de Coordenadas. A

³ Ementa: Integração dupla. Integração tripla. Mudança de coordenadas. Integrais de linha. Diferenciais exatas e independência de caminhos. Análise vetorial: teoremas de Green Gauss e Stokes. Disponível em https://unimontes.br/wp-content/uploads/2019/11/resolucao_cepex150.pdf; consultado em 12 mar. 2024.

escolha dessa abordagem se justifica pela necessidade de garantir que os participantes possuíssem os pré-requisitos para contribuir com a investigação.

Estrutura da Dissertação

A Dissertação é escrita em formato *multipaper*⁴, com a compilação de três artigos independentes, mas interligados por um objetivo geral comum. O formato inclui um capítulo de introdução e outro de considerações finais, ambos articulados aos três artigos. Nossa escolha se justifica pela dinâmica de responder aos objetivos por meio de artigos que, além de leitura fluida e objetivada aos interessados pela temática, já se encontram em formato mais adequado para a submissão e a publicação em periódicos do campo da Educação Matemática.

Na Introdução, abordamos o tema em questão, destacamos o interesse da pesquisa pelo tema; os objetivos propostos e a metodologia adotada, delineando assim o percurso seguido para condução da pesquisa.

A elaboração do Quadro 1 objetivou sintetizar a estruturação da dissertação, fornecendo uma visão geral da organização adotada, a qual direciona e orienta as etapas, objetivos, procedimentos e técnicas delineadas para cada artigo subsequente.

Quadro 1: Organização da Dissertação

	Artigo 1	Artigo 2	Artigo 3
Objetivo Geral	<i>Investigar como uma abordagem pedagógica, fundamentada nos pressupostos dos Registros de Representação Semiótica e apoiada pelo GeoGebra, pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, no contexto do Cálculo Integral</i>		

⁴ “O formato *Multipaper* refere-se à apresentação de uma dissertação ou tese como uma coletânea de artigos publicáveis, acompanhados, ou não, de um capítulo introdutório e de considerações finais” (Mutti e Klüber, 2018, p. 3).

Objetivos Específicos	Analisar o emprego de Tecnologias Digitais no ensino de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, em produções acadêmicas, com foco nas dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem.	Analisar dificuldades evidenciadas por estudantes, a partir de um teste diagnóstico, na mudança de registros de representação semiótica em tarefas que envolvem Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.	Analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação, sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.
Abordagem e Tipo de Pesquisa	Qualitativa e Análise Documental	Qualitativa e Estudo de Caso	Qualitativa e Estudo de Caso
Participantes da Pesquisa	Teses, Dissertações e Artigos Científicos	Estudantes da Licenciatura em Matemática	Estudantes da Licenciatura em Matemática

Fonte: Autor (adaptado de Soares, 2020, p. 36)

Nas Considerações Finais, são retomados os objetivos estabelecidos; abordamos as questões problemáticas e apresentamos os resultados obtidos, destacando as contribuições e abordagens que a pesquisa realizada pode oferecer para o campo da Educação Matemática.

Referências

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didáctica, In: BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-364.

BEZERRA, Cristina Alves. *Proposta de Abordagem para Técnicas de Integração usando o Software GeoGebra*. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Ceará. Fortaleza.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

COMETTI, Antônio Márcio. *Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no cálculo de várias variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem*. 2018. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus, 2003. p.11-33.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FERREIRA, Ronaldo Dias. *Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas*. 2021. 265 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FONSECA, Daila Silva Seabra de Moura. *Convergência de sequências de séries numéricas no Cálculo. Um trabalho visando a corporificação dos conceitos*. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto.

IRIAS, Diánis Ferreira; VIEIRA, Josislei Passos; MIRANDA, Paula Reis de; SILVA, Rafael Cazal; Cálculo Diferencial e Integral: analisando as dificuldades dos alunos de um curso de licenciatura em matemática. *Revista de Educação Matemática da UFOP*, Vol I. 2011.

MACÊDO, Josué Antunes; GREGOR, Isabela Cristina Soares. Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1–24, 2020.

MENDES, Luiz Otavio Rodrigues; PROENÇA, Marcelo Carlos de; PEREIRA, Ana Lucia. As potencialidades da resolução de problemas nas pesquisas sobre a formação inicial de professores de Matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 9, n. 19, p. 821–839, 2020.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. (Org.). *O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde*. 14ª ed. Rio de Janeiro: Hucitec, 2014.

MOTA, Janine Freitas. *Um estudo ontossemiótico sobre os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática*. 2021. 291f Tese (Doutorado em Educação Matemática) Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

MUTTI, G. S. L.; KLÜBER, T. E. Formato multipaper nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino: um panorama. In: *Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos*, 5., 2018, Foz do Iguaçu. Anais [...] Foz do Iguaçu: UNIOESTE, 2018. p. 1-14.

PESSOA, Nemone; ARAUJO, Karmem Werusca Fortes; SOUSA, Geraldino. Estudo sobre a aprendizagem de Cálculo I nos cursos de engenharia do Centro Universitário Santo Agostinho - UNIFSA. In: Congresso Brasileiro Ciência e Sociedade, 2019, Teresina. *Anais eletrônicos...* Campinas, Galoá, 2019.

PIAGET, Jean. *Epistemologia genética*. New York: Columbia University Press, 1970

RAMOS, Altina; FARIA, Paulo M.; FARIA, Ádila. Revisão Sistemática da Literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação. *Revista Diálogo Educacional*, Curitiba-PR, v. 14, n. 41, p. 17-36, 2014.

RODRIGUES, Luciana Avila; NEVES, Regina Silva Pina. O Cálculo Diferencial e Integral



na Universidade de Brasília: estratégia metodológica em estudo. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 97–111, 2019.

ROSA, Éllen Caroline Costa Santa; DA SILVA, Daniel Leite Mesquita; BARROS, André Vinícius Mendes; DO AMARAL, Tatiane Reis; LEITE, Neila Marcelle Gualberto. O panorama das atividades não presenciais relativas ao Pré-Cálculo e Cálculo I no IFNMG - Campus Montes Claros. *Revista Foco*, [S. l.], v. 16, n. 8, p. e2824, 2023.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press, 1978

Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Mudanças de Coordenadas: uma análise no contexto do Cálculo Integral

Difficulties in the teaching and learning processes of Coordinate Changes: an analysis in the context of Integral Calculus

Resumo: O estudo teve como eixo de discussão as dificuldades enfrentadas por professores e estudantes no ensino e na aprendizagem de Mudanças de Coordenadas para integração dupla e tripla. Com abordagem qualitativa, realizou-se uma revisão sistemática da literatura a partir de seleção de teses, dissertações e artigos sobre o tema. Onze produções acadêmicas chegaram à fase final da seleção, tendo em vista o objetivo geral de *analisar o emprego de tecnologias digitais no ensino de mudanças de coordenadas em Integrais Múltiplas, em produções acadêmicas com foco nas dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem*. Com a análise, foram identificadas dificuldades comuns na aprendizagem do Cálculo Integral, quanto a visualização na construção das figuras e gráficos e compreensão dos processos de integração. Verificou-se a falta de tarefas contextualizados nos processos de ensino. Os estudos indicam que ferramentas digitais como o GeoGebra ajudaram a superar algumas dessas dificuldades, proporcionando melhor visualização dos objetos matemáticos.

Palavras-chave: Mudança de Coordenadas. Cálculo Integral. Dificuldades no Ensino do Cálculo. Revisão de Literatura.

Abstract: The study focused on the difficulties faced by teachers and students in teaching and learning Coordinate Changes for double and triple integration. Using a qualitative approach, a systematic literature review was conducted based on a selection of theses, dissertations and articles on the subject. Eleven academic productions reached the final stage of the selection, with the general objective of analyzing the use of digital technologies in teaching coordinate changes in Multiple Integrals, in academic productions focusing on the difficulties reported in the teaching and learning processes. Through the analysis, common difficulties in learning Integral Calculus were identified, regarding visualization in the construction of figures and graphs and understanding of the integration processes. A lack of contextualized tasks in the teaching processes was verified. Studies indicate that digital tools such as GeoGebra helped to overcome some of these difficulties, providing better visualization of mathematical objects.

Keywords: Change of Coordinates. Integral Calculus. Difficulties in Teaching Calculus. Literature Review.

1.1 Introdução



O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina central no Ensino Superior, relacionada às Ciências Exatas, desempenhando um importante papel em diversas áreas do conhecimento, como Física, Economia, Engenharia, Medicina e Computação, entre outras. Esse campo da Matemática é uma ferramenta essencial para a resolução de problemas que foram modelados matematicamente ao longo da história, como o cálculo da medida da área de superfícies, exemplificado pelo Papiro Egípcio de Moscou. Com o passar do tempo, o Cálculo foi refinado e ampliado por novas ideias e pelo aperfeiçoamento do trabalho desenvolvido por matemáticos de gerações anteriores, consolidando-se como uma disciplina indispensável para o emprego da Matemática em problemas complexos e multidisciplinares (Sypniewski e Schubring, 2023).

Diante da importância do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Superior em Ciências Exatas, torna-se crucial aprofundar o estudo de técnicas específicas que viabilizam a resolução de problemas complexos. Entre essas técnicas, a Mudança de Coordenadas se destaca como uma importante ferramenta, especialmente em situações que envolvem simetrias ou geometrias complexas. A capacidade de transformar um sistema de coordenadas em outro mais adequado ao problema não só simplifica os cálculos, mas também revela aspectos que seriam difíceis de identificar utilizando métodos convencionais. Dessa forma, a Mudança de Coordenadas não é só um recurso técnico, mas uma estratégia conceitual que potencializa o entendimento e o emprego do Cálculo Integral em diversos campos do conhecimento.

Essas ferramentas são fundamentais em disciplinas como Física e Engenharia, em que o Cálculo Integral é utilizado para determinar grandezas como trabalho, energia e volumes, e a técnica de mudanças de coordenadas facilita a resolução de problemas em sistemas com simetrias específicas. No entanto, a complexidade desses tópicos, que envolve a abstração de conceitos como a visualização dos processos de integração e o emprego das mudanças de coordenadas em diferentes contextos apresentam desafios significativos tanto para estudantes quanto para professores (Malacarne et al., 2023).

Muitos estudantes se esforçam para compreender esses conceitos, como a transição entre diferentes sistemas de coordenadas — polares, cilíndricas, esféricas — e o emprego desses sistemas na resolução de problemas de Engenharia e Física. A dificuldade em visualizar e empregar esses processos é exacerbada pela falta de recursos educacionais que

promovam um entendimento contextualizado (Oliveira et al., 2020). Recursos como simulações interativas, modelos tridimensionais e exemplos práticos que conectam a teoria à prática poderiam auxiliar nesse processo, mas são frequentemente subutilizados ou inexistentes em muitas salas de aula.

Nos últimos anos, o uso de tecnologias digitais no ensino tem sido considerado como uma estratégia promissora para enfrentar alguns desses desafios. Aplicativos como o GeoGebra oferecem oportunidades para visualização espacial, de forma interativa, permitindo que os estudantes explorem visualmente a integração e as mudanças de coordenadas. Essa exploração ocorre por meio da manipulação dinâmica de gráficos, da alteração de sistemas de referência e da observação das transformações geométricas que acompanham a mudança de coordenadas. Por exemplo, ao manipular gráficos e superfícies em um ambiente digital, os estudantes podem observar como diferentes sistemas de coordenadas afetam a solução de um problema, o que potencialmente facilita a compreensão e aplicação dos conceitos.

Porém, há uma carência de pesquisas que investiguem o impacto dessas tecnologias no ensino de mudanças de coordenadas em Integrais Múltiplas. O estudo aqui apresentado busca preencher parte dessa lacuna ao analisar o emprego das tecnologias digitais no ensino do Cálculo Integral, destacando as dificuldades encontradas nos processos de ensino e de aprendizagem das mudanças de coordenadas nesse contexto. Abordar essas dificuldades é essencial, pois, se não forem superadas, podem comprometer o desempenho dos estudantes e sua preparação para desafios profissionais futuros, além de limitar o avanço em disciplinas mais complexas.

No estudo, dado o objetivo de *analisar o emprego das tecnologias digitais no ensino do Cálculo Integral, destacando as dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem*, conduzimos uma discussão a partir de uma revisão sistemática de literatura.

A revisão sistemática da literatura é uma técnica de pesquisa que adere a protocolos específicos, envolvendo uma compreensão estruturada de um extenso conjunto de documentos, com o propósito de avaliar a eficácia ou ineficácia de abordagens em um contexto particular (Galvão e Ricarte, 2019). Nesse contexto, o conjunto de documentos

utilizados para o estudo consistiu em onze produções, incluindo teses, dissertações e artigos científicos, que forneceram a base para a análise acerca do uso de tecnologias digitais no ensino do Cálculo Integral.

Na próxima seção, são delineados os métodos empregados, abrangendo a listagem das produções acadêmicas escolhidas. Em seguida, seguem as análises e discussões em relação ao corpus da pesquisa e, por fim, as considerações finais do artigo.

1.2 Metodologia

Para estruturar a investigação, incorporamos elementos da Engenharia Didática, conforme descrito por Artigue (1996). Essa metodologia se destaca pela abordagem meticulosa na organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa, cobrindo desde os fundamentos teóricos até as práticas experimentais. A capacidade de unir a pesquisa teórica com a prática educativa experimental é uma das vantagens marcantes dessa metodologia de investigação.

De acordo com Artigue (1996), a Engenharia Didática consiste em quatro fases que não necessariamente seguem uma sequência linear. Em certos momentos, é necessário que esses elementos sejam articulados e até mesmo sobrepostos para aperfeiçoar a condução do processo pedagógico. A fase inicial de análise, denominada análise preliminar, tem como objetivo compreender o contexto educacional, identificando os obstáculos que dificultam a aprendizagem. Com base nessa análise, durante a fase de concepção e análise a priori, são elaboradas tarefas, prevendo possíveis reações e dificuldades dos estudantes. Na fase de experimentação são implementadas essas tarefas, ajustando-as conforme a interação dos estudantes. Finalmente, na análise a posteriori, os dados produzidos são comparados com as previsões iniciais, permitindo validar ou ajustar hipóteses e fornecendo contribuições para futuras intervenções.

Neste artigo, em particular, abordamos exclusivamente a primeira fase que, segundo Machado (1999), envolve uma avaliação do arcabouço teórico geral da didática e dos conhecimentos prévios já estabelecidos, bem como outras investigações preliminares. Durante essa etapa, examinamos o uso de tecnologias digitais no ensino de mudanças de coordenadas em Integrais Múltiplas por meio de um levantamento bibliográfico. O intuito foi investigar as produções acadêmicas que abordam essa temática, destacando as dificuldades mais comuns encontradas tanto por professores quanto por estudantes nos processos de ensino e de

aprendizagem. Esse levantamento proporcionou uma visão detalhada dos desafios associados à integração dessas tecnologias no ambiente educacional, além de evidenciar as áreas em que essas ferramentas podem ser mais eficazes para facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Para tanto, realizamos uma revisão sistemática da literatura sobre o ensino do Cálculo Integral com o auxílio de tecnologias digitais. Ramos, Faria e Faria (2014, p. 19-20) enfatizam que essa revisão é uma técnica valiosa na área da educação e sugerem seu emprego na Educação, assim como em outras áreas do conhecimento. Seguindo essa orientação, confirmamos a afirmação dos autores citados de que “deveremos, [...], definir critérios, métodos precisos e sistemáticos, por forma a identificar as fontes bibliográficas com o máximo rigor, grau de eficiência e confiança no nosso trabalho”.

Ramos, Faria e Faria (2014) apresentam oito etapas para construção da revisão sistemática. Para a pesquisa aqui apresentada, subsidiados pelas etapas desses pesquisadores, adaptamos para quatro etapas essenciais: 1) elaboração de um protocolo de busca que se alinhasse aos objetivos e ao problema de pesquisa; 2) realização da busca nas fontes selecionadas; 3) triagem dos materiais encontrados; 4) análise e discussão do corpus final da pesquisa.

Para a seleção do *corpus* da pesquisa, desenvolvemos um protocolo de busca que incluiu informações como o objetivo da revisão, a pergunta de pesquisa, critérios cronológicos, a base de dados utilizada e a combinação de descritores (palavras-chave) utilizados na busca. Os descritores utilizados foram *Cálculo Integral*, *Integrais Múltiplas* e *Integral Definida*. No protocolo, detalhamos os critérios de inclusão e exclusão empregados na busca. Ressaltamos que seguimos a abordagem recomendada por Ramos, Faria e Faria (2014, p. 23), registrando todas as etapas do processo de pesquisa.

A pesquisa foi conduzida de maneira transparente e objetiva, fornecendo uma descrição detalhada do processo de busca e seleção de cada trabalho. Após selecionarmos as produções acadêmicas com os descritores mencionados, realizamos uma triagem em quatro etapas: análise do título, palavras-chave, resumo e, finalmente, leitura completa do trabalho.

Para escolher as teses e dissertações, utilizamos o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e a BDTD como fonte de pesquisa. Na escolha dos artigos científicos, conduzimos uma pesquisa no portal da *Scielo* — *Scientific Electronic Library Online*⁵. Durante essa seleção, configuramos os critérios de data de publicação para abranger o período de 2018 a 2022, visando encontrar pesquisas recentes. O Quadro 1 apresenta o protocolo de busca.

Quadro 1: Protocolo de Busca

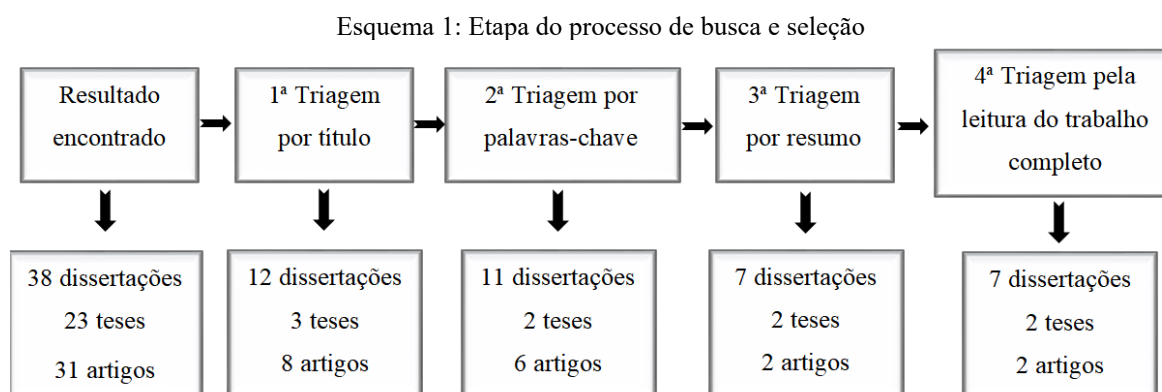
Objetivo da revisão	Analisar o emprego de Tecnologias Digitais no ensino de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, em produções acadêmicas, com foco nas dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem
Questão norteadora	Como as Tecnologias Digitais têm sido empregadas no ensino do Cálculo Integral, e quais desafios e dificuldades são evidenciados na aprendizagem das Mudanças de Coordenadas, segundo a revisão sistemática de literatura?
Parâmetro cronológico	2018 a 2022
Descritores (palavras-chave)	Integrais Múltiplas; Cálculo Integral; Integral Definida.
Critérios de inclusão	Produções acadêmicas no idioma português; Produções acadêmicas publicadas dentro dos parâmetros cronológicos; Produções acadêmicas que abordem o uso de Tecnologias Digitais no ensino do Cálculo Integral. Produções acadêmicas que tiveram o ensino superior como objeto de estudo.
Critérios de exclusão	Produções acadêmicas em outro idioma; Produções acadêmicas publicadas em anos diferentes dos parâmetros cronológicos; Produções acadêmicas que não abordem o uso de Tecnologias Digitais no ensino do Cálculo Integral. Produções acadêmicas que não tiveram o ensino superior como objeto de estudo.

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Após a criação do protocolo de pesquisa, avançamos para a próxima etapa do estudo, que envolveu a inclusão dos descritores no mecanismo de busca *on-line*. Posteriormente, procedemos à avaliação e à seleção das produções acadêmicas encontradas. A seguir,

⁵ Biblioteca eletrônica científica de acesso aberto que disponibiliza publicações de periódicos científicos <https://www.scielo.br/>

apresentamos um esquema, na Figura 1, que fornece um panorama das conclusões obtidas em cada fase da triagem das produções acadêmicas.



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Com base nas produções acadêmicas identificadas pela pesquisa, conforme detalhado na Figura 1, foi desenvolvido o Quadro 2, que representa o corpus final das produções escolhidas. O quadro foi organizado em cronologia ascendente, ordenando a partir do ano de publicação, seguido por título, autores e a instituição à qual o trabalho está afiliado. O tipo de cada produção foi assim codificado: A (artigo), D (dissertação) e T (tese).

Quadro 2: *Corpus* final das Teses e Dissertações

Ano de Publicação	Tipo	Título	Autor	Instituição ou Periódico
2017	A	Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I	Elisangela Pavanelo Renan Lima	Bolema
2018	D	Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem	Márcio Antônio Cometti	Universidade Federal de Ouro Preto
2018	D	Utilização do <i>software</i> Maple para o cálculo de áreas e volumes	Silvimar Fabio Ferreira	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
2018	T	O jogo das operações semióticas na aprendizagem da Integral	Lucia	Universidade Federal

		Definida no cálculo de área	Menoncini	de Santa Catarina
2019	D	Atividades para estudo de Integrais em um ambiente de ensino híbrido	Rodrigo Tavares da Silva	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
2019	D	A utilização do GeoGebra no estudo dos conceitos de limite, derivada e integral definida.	Fredson Valois Coutinho da Rocha	Universidade Federal do Vale do São Francisco
2020	D	O uso do GeoGebra no cálculo de área: um produto educacional no cálculo de área do Lago Azul de Araguaína-TO	Francisco Djalma da Silva Paulo	Universidade Federal do Tocantins
2021	D	Expandindo telas e contando experiências em educação matemática com o GeoGebra: da sensibilidade do toque à produção de conceitos de Integrais Múltiplas com o smartphone	Victor Ferreira Ragoni	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
2021	D	Gestão de tarefas e desenvolvimento de crivos de superfícies utilizando o <i>software</i> Maple: uma proposta para o estudo de Cálculo de Integrais Múltiplas no ensino superior	Carolina Ribeiro de Almeida	Universidade Estadual de Santa Cruz
2021	T	Um estudo ontossemiótico sobre os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática	Janine Freitas Mota	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2021	A	Utilização do aplicativo “Waze” no cálculo de distância através da integral definida	Leila Thomazelli Thieghi	Revista Brasileira de Ensino de Física

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Ao encerrar essa etapa, para compor o corpus da pesquisa, selecionamos sete dissertações, duas teses e dois artigos. A discussão dos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Integral evoluiu nessas produções ao longo dos anos, com foco crescente em inovações pedagógicas e tecnológicas para facilitar a compreensão de conceitos e aplicações dos processos de integração.

Na próxima seção, apresentamos as contribuições de cada obra para a pesquisa, assim

como os aspectos destacados pelos autores.

1.3 Análise

Foram desenvolvidas categorias de análise para esta revisão sistemática de literatura que incluem:

- tecnologias digitais: Explorando o papel de ferramentas tecnológicas no ensino de Cálculo Integral, com base na frequência e diversidade do uso de tecnologias mencionadas nas produções acadêmicas selecionadas;
- teorias e metodologias de ensino: Análise das abordagens teórico-metodológicas adotadas, como Engenharia Didática e EOS, desenvolvidas a partir das sequências didáticas e métodos descritos;
- desafios e dificuldades: Identificação dos principais obstáculos enfrentados por estudantes, baseados nas dificuldades relatadas nas produções, com destaque para:
 - ✓ dificuldades cognitivas e didáticas: Os estudantes enfrentam dificuldades na transição para o pensamento algébrico, compreensão da Integral Definida e visualização de problemas tridimensionais;
 - ✓ falta de pré-requisitos: A falta de fundamentos matemáticos básicos, sendo um obstáculo significativo, o que leva à necessidade de revisitar conceitos fundamentais nas aulas de cálculo;
- resultados de aprendizagem: avaliação dos impactos das abordagens pedagógicas no desenvolvimento das competências dos estudantes, derivada das evidências de melhoria relatadas nas pesquisas.

Com base nas categorias de análise desenvolvidas, podemos aprofundar nossa discussão sobre cada uma delas. Inicialmente, focaremos na integração das tecnologias digitais no ensino do Cálculo Integral, explorando como ferramentas, como o GeoGebra e o Maple, têm sido utilizadas para aprimorar a visualização e compreensão de conceitos fundamentais, bem como os parâmetros da resolução dos processos de cálculos. Na sequência, discutiremos a relevância desses aplicativos, conforme destacado nas produções

acadêmicas selecionadas, e como elas contribuem para superar desafios nos processos de ensino e de aprendizagem.

1.3.1 Tecnologias Digitais

A evolução notável nas produções acadêmicas selecionadas é a integração de tecnologias digitais, como o GeoGebra e o Maple, no ensino do Cálculo Integral. O GeoGebra é amplamente utilizado para ajudar os estudantes a visualizar e interagir com conceitos e cálculos de limites, derivadas e integrais definidas, enquanto o Maple é empregado em cálculos mais complexos, como medidas de áreas e volumes. Esses aplicativos facilitam uma aprendizagem interativa, promovendo a compreensão dos conceitos matemáticos. Autores como Cometti (2018), Ragoni (2021), Ferreira (2018) e Thieghi (2021) destacam como essas ferramentas digitais podem ajudar na compreensão de conceitos, com o auxílio da visualização, facilitando a compreensão de Integrais Múltiplas e cálculo de medida de áreas.

Os trabalhos de Cometti (2018) e Ragoni (2021) destacam a importância do GeoGebra, em sua versão 3D, no ensino de Cálculo. Cometti (2018) informa que a utilização do GeoGebra 3D no ensino de Integrais Múltiplas possibilita maior interação do estudante com o conteúdo, permitindo melhor visualização das superfícies envolvidas. Esse tipo de abordagem é fundamental, especialmente em tópicos mais abstratos do Cálculo, em que a representação visual pode auxiliar significativamente na compreensão dos conceitos e parâmetros de cálculos.

No entanto, esses autores também apresentam desafios importantes. Ragoni (2021), por exemplo, ressalta que a resistência dos professores em adotar novas tecnologias, muitas vezes, está associada à falta de familiaridade e à ausência de uma formação específica para o uso dessas ferramentas. Essa observação evidencia a necessidade de uma formação continuada dos professores para que possam integrar essas tecnologias de maneira eficaz em suas práticas de ensino.

Thieghi (2021) explora o uso do aplicativo Waze para o cálculo de distâncias por meio de integrais definidas. Esse trabalho mostra como tecnologias que não são originalmente desenvolvidas para o ensino podem ser adaptadas para esses fins. O pesquisador afirma que, ao utilizar o Waze, os estudantes conseguem perceber a aplicação das integrais definidas, tornando o aprendizado mais significativo. Contudo, ele também aponta para os desafios de implementação, como a necessidade de adaptar o currículo e a resistência de parte dos

professores em alterar suas metodologias de ensino.

Ferreira (2018) e Almeida (2021) discutem a aplicação de softwares como Maple, que podem ajudar a simplificar cálculos complexos e permitir que os estudantes se concentrem na compreensão conceitual. Ferreira (2018) declara que, apesar dos benefícios evidentes do uso do Maple para o ensino de Cálculo, a falta de infraestrutura adequada nas escolas e universidades representa um obstáculo. Almeida (2021), por sua vez, argumenta que a adoção de *softwares* matemáticos deve ser acompanhada por um planejamento pedagógico que considere as limitações e o potencial desses recursos, para evitar que o ensino se torne excessivamente dependente da tecnologia em detrimento da compreensão conceitual.

As ferramentas tecnológicas, como GeoGebra, Maple e outros aplicativos interativos, têm o potencial de ressignificar o ensino do Cálculo. No entanto, a implementação dessas ferramentas depende de fatores como a formação adequada dos professores, a integração coerente dessas tecnologias no currículo, o acesso dos estudantes a recursos tecnológicos e a disposição para adotar novas abordagens pedagógicas que favoreçam a interação e a experimentação.

Por um lado, há a necessidade de garantir que os professores estejam capacitados para utilizar essas ferramentas de forma eficaz. Isso inclui não apenas a formação técnica, mas também uma compreensão pedagógica de como essas tecnologias podem ser integradas de maneira a potencializar o aprendizado. Por outro lado, o acesso desigual a essas tecnologias é um desafio significativo. Ragoni (2021) atesta que a disparidade no acesso a recursos tecnológicos entre diferentes escolas e regiões pode exacerbar as desigualdades educacionais. Em muitas instituições, especialmente em áreas menos favorecidas, a falta de equipamentos adequados e de suporte técnico limita o uso de tecnologias no ensino de Cálculo. Isso não apenas impede os estudantes de acessar uma educação de qualidade, mas também pode desmotivá-los, uma vez que não veem como os conceitos matemáticos se aplicam em contextos práticos, um entendimento que as ferramentas tecnológicas podem facilitar.

Outra questão relevante é a maneira como os estudantes interagem com as tecnologias. Cometti (2018) destaca que o uso de tecnologias, como o GeoGebra, precisa ser mediado de

forma a promover a formação de conceitos, e não apenas o uso superficial das ferramentas. Isso significa que os professores precisam orientar os estudantes na exploração das tecnologias, ajudando-os a conectar as representações visuais com os conceitos teóricos subjacentes. Sem essa mediação, há o risco de os estudantes utilizarem as tecnologias computacionais de forma mecânica, sem desenvolver uma verdadeira compreensão dos conceitos de Cálculo.

Em um estudo de caso, Almeida (2021) relata que, em uma turma em que o Maple foi utilizado de forma intensiva, os estudantes que receberam acompanhamento contínuo dos professores apresentaram uma compreensão significativamente maior dos conceitos em comparação com aqueles que usaram o software de maneira independente. Isso ressalta a importância do papel do professor na integração das tecnologias no ensino.

Além disso, a implementação eficaz de tecnologias no ensino de Cálculo requer uma abordagem pedagógica flexível. Ragoni (2021) sugere que, em vez de substituir completamente os métodos tradicionais, as tecnologias podem ser usadas como complementares que potencializam os processos de ensino e de aprendizagem. Essa abordagem híbrida permite que os professores aproveitem as vantagens das tecnologias sem abandonar as estratégias pedagógicas anteriormente adotadas. Assim, enquanto as tecnologias digitais oferecem oportunidades para melhorar o ensino do Cálculo, sua implementação bem-sucedida depende de uma série de fatores, incluindo a capacitação dos professores, o acesso adequado a recursos e a integração inteligente dessas ferramentas no currículo. As condições de trabalho, infraestrutura física e tecnológica da instituição são essenciais para garantir que as tecnologias não apenas facilitem o ensino, mas também contribuam para uma compreensão mais profunda e duradoura dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes.

A seguir, exploraremos o que as produções acadêmicas revelam acerca das teorias e metodologias que, quando integradas ao uso de tecnologias, podem transformar a experiência de aprendizagem dos conceitos e métodos de cálculo.

1.3.2 Teorias e Metodologias de Ensino

O ensino de Cálculo, tradicionalmente, tem sido orientado por estratégias metodológicas, nas quais a transmissão de conteúdo pelo professor é central, e a memorização de procedimentos pelos estudantes ocupa um papel significativo. Cometti (2018) critica essa abordagem, afirmando que ela promove uma ênfase excessiva na resolução de exercícios

mecânicos, frequentemente resultando em uma compreensão superficial dos conceitos matemáticos. Ferreira (2018) complementa essa perspectiva ao argumentar que, apesar de eficazes no desenvolvimento de habilidades operacionais, esses métodos falham por não proporcionar um entendimento crítico, essencial para a aplicação do conhecimento em situações novas e complexas.

Silva (2019) e Rocha (2019) ampliam essa discussão ao abordar as limitações dos métodos tradicionais, particularmente no desenvolvimento de habilidades de visualização e interpretação gráfica — aspectos determinantes no aprendizado do Cálculo. Esses autores sustentam que a mera transmissão de conhecimento não garante que os estudantes consigam aplicar conceitos matemáticos em contextos variados, especialmente em problemas que envolvem a interpretação de gráficos ou a visualização de formas tridimensionais. Fundamentado nessas críticas, Cometti (2018) sugere a integração de sequências didáticas como uma alternativa promissora. Essas sequências, quando planejadas e implementadas de forma cuidadosa, permitem que os estudantes construam conhecimento de maneira progressiva, facilitando a transição entre diferentes níveis de complexidade conceitual.

Em seu estudo, Ferreira (2018) defende a introdução de sequências didáticas centradas em problemas contextualizados como uma estratégia para motivar os estudantes e conectar o aprendizado teórico a aplicações. Ao observar como os conceitos de Cálculo se aplicam em contextos concretos, os estudantes tendem a desenvolver uma compreensão desses conceitos. Nessa perspectiva, Silva (2019) e Rocha (2019) sugerem que a integração de sequências didáticas com abordagens, como a Engenharia Didática e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS), pode transformar a experiência de aprendizagem. A Engenharia Didática, especificamente, é vista como uma abordagem sistemática para o design e implementação de sequências de ensino e objetos de aprendizagem que consideram tanto o conteúdo matemático quanto as dificuldades cognitivas dos estudantes. Em seu estudo ontosemiótico, Mota (2021) investiga os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática. O EOS é uma teoria que analisa os processos de ensino e de aprendizagem a partir de distintas facetas, como a epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica. Essa abordagem oferece um marco

teórico para compreender como o conhecimento matemático é construído e transmitido em contextos educacionais.

A combinação dessas abordagens, como discutido por Menoncini (2018), pode enriquecer significativamente os processos de ensino e de aprendizagem. Ele sugere que, ao permitir que os estudantes transitem entre representações gráficas, algébricas e numéricas, essas metodologias promovem uma compreensão mais integrada e robusta dos conceitos de Cálculo. Pavanelo e Lima (2017) e Thieghi (2021), ao analisarem o impacto das metodologias ativas no ensino de Cálculo, enfatizam que a implementação de sequências didáticas inovadoras não só facilita a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também o desenvolvimento de habilidades críticas e analíticas, essenciais para a aprendizagem em áreas avançadas da Matemática e na mobilização dos conhecimentos em situações diversas.

A introdução dessas abordagens teórico-metodológicas, como a Engenharia Didática e o EOS, representa uma mudança de paradigma no ensino de Cálculo. Cometti (2018) e Ferreira (2018) concluem que essas abordagens não apenas melhoram a compreensão dos conceitos, mas também tornam o aprendizado mais relevante e motivador, conectando o conhecimento teórico com sua aplicação e ajudando os estudantes a enxergar a utilidade dos conceitos matemáticos em contextos reais.

Embora as abordagens teórico-metodológicas ofereçam estratégias para potencializar o ensino de Cálculo, sua implementação deve levar em conta as dificuldades cognitivas e didáticas que frequentemente surgem. Assim, partimos para a análise das principais dificuldades, elencadas nas produções acadêmicas selecionadas, enfrentadas no processo de aprendizagem do Cálculo, e como as abordagens pedagógicas discutidas anteriormente podem ser ajustadas para superá-las.

1.3.3 Dificuldades Cognitivas e Didáticas

O ensino de Cálculo apresenta desafios significativos tanto para estudantes quanto para professores, especialmente no que se refere às dificuldades cognitivas e didáticas. Cometti (2018) discute como a transição para o pensamento algébrico é um dos principais obstáculos enfrentados pelos estudantes. Ele declara que muitos chegam ao Ensino Superior com uma compreensão limitada dos conceitos fundamentais de Matemática, o que dificulta a compreensão dos novos conteúdos implementados nas disciplinas de Cálculo. Silva (2019) aprofunda essa análise ao explorar a dificuldade dos estudantes em compreender a integral

definida, um conceito que exige uma combinação de habilidades de visualização e manipulação simbólica. Sem uma base sólida nesses aspectos, os estudantes repetidamente falham em entender a integral não apenas como uma área de uma região sob uma curva, mas como uma ferramenta para resolver problemas complexos em diversas áreas da Ciência e Engenharia.

Rocha (2019) contribui para essa discussão ao focar nas dificuldades que os estudantes encontram na visualização de problemas tridimensionais. Ele ressalta que a maioria daqueles está acostumada a trabalhar com representações bidimensionais, como gráficos simples de funções, mas a transição para a compreensão de formas e superfícies em três dimensões requer um desenvolvimento cognitivo que muitas vezes não é suficientemente abordado nos métodos tradicionais de ensino. Ragoni (2021) complementa, argumentando que, embora a introdução de ferramentas gráficas e tecnológicas no ensino de Cálculo tenha o potencial de melhorar a compreensão desses conceitos complexos, a simples exposição a gráficos e visualizações não é suficiente. Ele enfatiza que é fundamental que os estudantes recebam orientação adequada na análise e interpretação dessas representações visuais para que possam realmente compreender e aplicar o conhecimento de forma eficaz.

Mota (2021) e Almeida (2021) afirmam que as dificuldades cognitivas enfrentadas pelos estudantes podem ser mitigadas pela implementação de metodologias de ensino que promovam a experimentação e a descoberta, como a Engenharia Didática e o EOS. Eles argumentam que essas abordagens possibilitam que os estudantes construam conhecimento de forma ativa e participativa, o que ajuda a superar as barreiras cognitivas associadas à compreensão de conceitos complexos. Ferreira (2018), ao destacar a importância de conectar o aprendizado teórico com aplicações, argumenta que a visualização gráfica pode servir como uma ponte entre o conhecimento teórico e sua aplicação em problemas do mundo real. Ele anuncia que essa conexão além de facilitar a compreensão dos conceitos, motiva os estudantes ao mostrar a relevância do que estão aprendendo.

Silva (2019) defende que tarefas que incentivam a manipulação e exploração de gráficos ajudam os estudantes a desenvolver a habilidade de transitar entre diferentes representações de um problema matemático. Essa ação não apenas reforça a compreensão dos

conceitos, mas também promove o desenvolvimento de habilidades analíticas e críticas — essenciais para o bom desempenho em áreas avançadas da Matemática. Rocha (2019) e Pavanelo e Lima (2017) declaram que a transição para a compreensão de problemas tridimensionais pode ser facilitada pelo uso de ferramentas tecnológicas, como *softwares* de plotagem 3D, permitindo que os estudantes visualizem e manipulem formas complexas de maneira interativa. Eles argumentam que, ao desenvolver a capacidade de visualizar e manipular representações gráficas tridimensionais, os estudantes adquirem maior competência de compreender conceitos como volume, superfície e integral de linha, que são fundamentais em muitas aplicações do Cálculo.

Thieghi (2021) conclui que a superação das dificuldades cognitivas no ensino de Cálculo requer uma abordagem integrada, que combine o uso de ferramentas tecnológicas, orientação adequada e metodologias ativas que incentivem a exploração e a descoberta. Ele argumenta que essa combinação de métodos pode ajudar a superar as barreiras cognitivas e didáticas, promovendo compreensão dos conceitos matemáticos e preparando os estudantes para mobilizar esse conhecimento de forma significativa em suas futuras carreiras.

Superar as dificuldades cognitivas e didáticas no ensino de Cálculo é um passo importante, mas igualmente essencial é lidar com a falta de pré-requisitos dos estudantes. A seguir, discutimos como a insuficiência de fundamentos matemáticos é destacada nas pesquisas e como essa pode afetar o desempenho em Cálculo, além de estratégias que podem ser adotadas para preparar melhor os estudantes para enfrentar os desafios dessa disciplina.

1.3.4 Falta de Pré-requisitos

Um dos principais desafios no ensino de Cálculo é a falta de pré-requisitos dos estudantes, o que muitas vezes resulta em dificuldades significativas na compreensão dos conceitos avançados introduzidos nessa disciplina. Ferreira (2018) argumenta que muitos estudantes no Ensino Superior chegam com uma base insuficiente de conceitos elementares de Matemática, o que prejudica sua capacidade de acompanhar o ritmo das aulas de Cálculo e de compreender novos conceitos de maneira eficaz. Pavanelo e Lima (2017) reforçam essa visão ao observar que a ausência de uma compreensão sólida dos fundamentos matemáticos, como álgebra e trigonometria, é um dos principais obstáculos no ensino de Cálculo. Eles sugerem que, para contornar esse problema, é essencial que os cursos de Cálculo comecem com uma revisão dos conceitos fundamentais, garantindo que todos os estudantes tenham uma

base comum a partir da qual possam progredir.

Thieghi (2021) acrescenta que a falta de pré-requisitos não apenas impede a compreensão dos conceitos de Cálculo, mas também contribui para a desmotivação dos estudantes. Ele argumenta que, quando esses não conseguem acompanhar o conteúdo, devido a lacunas em seu conhecimento prévio, os estudantes tendem a perder o interesse e o engajamento nas aulas, o que resulta em um desempenho insatisfatório. Mota (2021) e Rocha (2019) apontam que uma das maneiras de abordar essa questão é a implementação de avaliações diagnósticas no início dos cursos de Cálculo, permitindo que os professores identifiquem as lacunas no conhecimento dos ingressantes e adaptem suas abordagens de ensino para atender as necessidades individuais de cada estudante.

Silva (2019) propõe a implementação de cursos de nivelamento em Matemática antes do início das disciplinas de Cálculo como alternativa para mitigar os efeitos da falta de pré-requisitos. Esses cursos, segundo ele, poderiam focar em revisar os conceitos e métodos fundamentais necessários para o sucesso no Cálculo, garantindo que todos os estudantes estejam preparados para os desafios que enfrentarão. Sugere ainda que, durante o curso de Cálculo, os professores dediquem tempo para revisar os conceitos matemáticos elementares sempre que necessário, reforçando a conexão entre o conhecimento prévio e os novos conteúdos apresentados.

Ragoni (2021), ao discutir a importância do conhecimento prévio no ensino de Cálculo, enfatiza que a compreensão de conceitos como funções, limites e derivadas depende fortemente de uma base sólida em Matemática construída na Educação Básica. Ele argumenta que, sem essa base, os estudantes têm dificuldade em visualizar e manipular as representações gráficas e simbólicas dos conceitos de Cálculo, o que compromete sua capacidade de resolver problemas e de mobilizar o conhecimento em situações práticas. Almeida (2021) e Paulo (2020) aludem à integração de tecnologias digitais, como softwares de Matemática, para ajudar a compensar as deficiências nos pré-requisitos, permitindo que os estudantes explorem e experimentem conceitos matemáticos de maneira interativa e visual.

A falta de pré-requisitos, portanto, representa um desafio significativo no ensino de

Cálculo, mas pode ser mitigada com abordagens pedagógicas que incluam revisões dos conceitos fundamentais, implementação de avaliações diagnósticas e utilização de tecnologias digitais para reforçar e complementar o aprendizado. Thieghi (2021) conclui que, ao abordar essas lacunas nos pré-requisitos de maneira proativa, os professores podem, além de melhorar a compreensão dos conceitos de Cálculo dos estudantes, aumentar a motivação e engajamento nas aulas, contribuindo para um desempenho acadêmico mais satisfatório.

Após a análise dos principais desafios relacionados à insuficiência de pré-requisitos no ensino de Cálculo, analisaremos, na subseção seguinte, o que essas produções revelam acerca da avaliação dos impactos das abordagens pedagógicas no desenvolvimento das competências dos estudantes, derivada das evidências de melhoria relatadas nas pesquisas.

1.3.5 Resultados de Aprendizagem

A adoção de metodologias inovadoras no ensino do Cálculo tem mostrado impacto positivo nos resultados de aprendizagem. Cometti (2018) e Pavanelo e Lima (2017) destacam que as abordagens centradas no estudante, como o EOS e a Engenharia Didática, têm promovido uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, ao incentivar os estudantes a se envolver ativamente na construção do conhecimento. Essa participação ativa, segundo Cometti (2018), resulta em um aprendizado mais significativo, com os estudantes mostrando maior capacidade de empregar os conceitos de Cálculo em contextos acadêmicos e profissionais.

Ferreira (2018) complementa ao argumentar que a implementação de sequências didáticas bem planejadas, que integram teoria e prática, facilita a transição do conhecimento abstrato para sua aplicação, o que é refletido em melhor desempenho nas avaliações formais e na resolução de problemas complexos. Ele afirma que, ao enfrentar situações desafiadoras que exigem o emprego de múltiplos conceitos matemáticos, os estudantes que participaram de cursos baseados em metodologias ativas tendem a mostrar maior autonomia e confiança na resolução de problemas, comparados aos que seguiram métodos de ensino mais tradicionais.

Silva (2019) e Rocha (2019) também apontam para um aumento na capacidade de os estudantes visualizarem e interpretarem representações gráficas e geométricas após a introdução de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, no ensino de Cálculo. Essas ferramentas permitem aos estudantes explorar conceitos de maneira dinâmica e interativa, o que não só facilita a compreensão dos temas, mas também estimula o interesse e o

engajamento no aprendizado. Como resultado, os estudantes não apenas melhoram suas notas nas avaliações, mas também mostram maior interesse em continuar seus estudos na área de Matemática e Ciências Exatas.

Além disso, Ragoni (2021) destaca que a abordagem integrada, que combina métodos tradicionais com a utilização de tecnologias digitais, tem contribuído para reduzir as taxas de desistência em cursos de Cálculo. Ele discute que, ao tornar o aprendizado mais acessível e relevante, essas metodologias ajudam a combater a desmotivação e o desinteresse que frequentemente levam os estudantes a abandonar os cursos de Cálculo. Cometti (2018) corrobora essa visão, observando que, com o aumento da compreensão e da confiança em suas habilidades, os estudantes são mais propensos a persistir nos estudos, resultando em maior taxa de retenção e sucesso nos cursos superiores de Ciências Exatas.

Por fim, Mota (2021) e Thieghi (2021) afirmam que a melhoria nos resultados de aprendizagem não se limita ao desempenho acadêmico. Eles acrescentam que os estudantes que passaram por cursos que incorporam essas metodologias inovadoras também desenvolvem habilidades transversais, como pensamento crítico, resolução de problemas e capacidade de trabalhar de forma colaborativa, que são essenciais para o bom desempenho em qualquer área profissional. Essa preparação mais holística reflete a eficácia dessas novas abordagens pedagógicas no ensino de conceitos específicos de Cálculo e na formação integral dos estudantes como profissionais e cidadãos.

Após a apresentação das nossas análises realizadas a partir da categorização elencada previamente, sintetizamos os principais achados e reflexões que emergiram neste estudo. Esse panorama nos permite, então, avançar para as considerações em que serão discutidas as implicações desses resultados, as limitações identificadas, além das perspectivas futuras para o aprimoramento do ensino de Cálculo à luz das evidências levantadas.

1.4 Considerações finais

O estudo teve como objetivo *analisar o emprego de Tecnologias Digitais no ensino de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, em produções acadêmicas, com foco nas dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem.* A partir da revisão



sistemática da literatura, constatou-se que o uso de *softwares*, como GeoGebra, pode melhorar a compreensão dos estudantes, oferecendo recursos visuais e interativos que facilitam a visualização das mudanças de coordenadas e a realização de cálculos complexos. No entanto, sua implementação ainda enfrenta barreiras significativas, como a falta de formação adequada dos professores para utilizar essas ferramentas de maneira eficaz, a dificuldade em integrar essas tecnologias de forma harmoniosa ao currículo existente.

Além disso, as condições de trabalho dos professores representam um fator crítico na adoção dessas tecnologias. Muitos professores enfrentam jornadas exaustivas, com alta carga horária e um grande número de turmas, o que reduz o tempo disponível para o planejamento de suas aulas. Essa sobrecarga, somada a salários muitas vezes defasados e à ausência de incentivos institucionais para o desenvolvimento profissional, dificulta a adoção de novas metodologias e a busca por formação continuada. Espera-se que os professores acompanhem as inovações tecnológicas e reformulem suas práticas, mas, sem melhores condições de trabalho, essa expectativa se torna desproporcional à realidade enfrentada nas instituições de ensino. Soma-se a isso a desigualdade no acesso a recursos tecnológicos, que agrava ainda mais as dificuldades na mobilização de ferramentas digitais no ensino de Cálculo e Integrais Múltiplas.

Foi percebida a necessidade de formação continuada para os professores, que precisam ser capacitados para utilizar as tecnologias digitais em suas aulas. Além disso, as instituições de ensino precisam investir em infraestrutura tecnológica para garantir que os recursos necessários estejam disponíveis para todos os estudantes.

As dificuldades cognitivas e didáticas enfrentadas no aprendizado do Cálculo Integral estão intimamente ligadas à natureza dos conceitos envolvidos. A revisão sistemática revelou que, nas produções analisadas, muitos estudantes têm dificuldade em relacionar os conceitos matemáticos com aplicações, o que pode ser atribuído à falta de metodologias que promovam essa conexão. O estudo revelou a necessidade de contextualizar o ensino do Cálculo Integral e das mudanças de coordenadas. Ao relacionar os conceitos matemáticos com situações do cotidiano ou com problemas práticos que os estudantes possam enfrentar, os professores podem tornar o aprendizado mais engajador.

Outro fator identificado foi a falta de conhecimento prévio dos estudantes, que muitas vezes entram em cursos de Cálculo Integral sem base adequada em conceitos fundamentais.

Esse déficit inicial compromete a capacidade daqueles de acompanhar o conteúdo. O estudo destacou a importância de estratégias de ensino que levem em conta as lacunas no conhecimento prévio dos estudantes, proporcionando revisões e reforços necessários para que todos possam se beneficiar plenamente das ferramentas tecnológicas disponíveis.

Os resultados de aprendizagem indicam que a utilização de tecnologias digitais pode melhorar significativamente o desempenho dos estudantes em Cálculo Integral. Aplicativos como o GeoGebra, facilitam a compreensão conceitual e podem melhorar as habilidades de resolução de problemas, permitindo uma exploração dinâmica e interativa dos conceitos. Esses resultados podem estar ligados à implementação de sequências didáticas bem planejadas, que integram teoria e prática de maneira estruturada. Essa abordagem garante que o conhecimento seja empregado de forma aplicada, potencializando o impacto das tecnologias nos processos de ensino e de aprendizagem. Contudo, essas estratégias dependem do contexto educacional, da formação dos professores e da forma como as tecnologias são integradas ao currículo.

Apesar das contribuições do presente estudo, é importante reconhecer suas limitações. A revisão sistemática da literatura foi realizada com um número restrito de bases de dados e em um período específico, o que significa que outros estudos relevantes podem não ter sido incluídos na análise. Além disso, o foco do estudo foi principalmente o uso de tecnologias digitais no ensino do Cálculo Integral, em detrimento de outras abordagens pedagógicas que poderiam ser igualmente eficazes.

Outra limitação diz respeito à generalização dos resultados. Embora os estudos revisados ofereçam dados valiosos, é importante lembrar que as dificuldades enfrentadas no ensino de mudanças de coordenadas podem variar significativamente, dependendo do contexto educativo, da preparação dos professores e das características dos estudantes.

Com base nos achados e nas limitações do estudo, várias direções para pesquisas futuras podem ser sugeridas. Em primeiro lugar, seria útil expandir a revisão sistemática da literatura para incluir outros bancos de dados e um período mais longo, a fim de capturar uma visão mais abrangente do uso de tecnologias digitais no ensino de Cálculo Integral.

Além disso, futuras pesquisas poderiam explorar outras metodologias pedagógicas, como a aprendizagem baseada em problemas ou a sala de aula invertida, e articulá-las com o uso de tecnologias digitais. Também seria interessante investigar como diferentes perfis de estudantes — por exemplo, com diferentes níveis de preparo matemático ou com diferentes estilos de aprendizado — respondem ao uso de tecnologias no ensino de Cálculo Integral.

Ressalta-se que pode ser interessante conduzir estudos empíricos que examinem diretamente o impacto do uso de tecnologias digitais no desempenho dos estudantes em Cálculo Integral. Esses estudos poderiam fornecer evidências sobre as potencialidades das ferramentas em prol da aprendizagem e ajudar a orientar políticas educacionais e práticas pedagógicas.

Finalmente, o presente estudo apresentou algumas dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem de mudanças de coordenadas no Cálculo Integral e destacou o potencial das tecnologias digitais para superar essas dificuldades. No entanto, a implementação satisfatória dessas tecnologias requer não apenas formação adequada para os professores, mas também um investimento contínuo em infraestrutura e uma abordagem didática que contextualize o aprendizado matemático. Ao abordar essas questões, as futuras pesquisas e práticas pedagógicas poderão contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática mais consistentes.

1.5 Referências

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didáctica, In: BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-364.

GALVÃO, Maria Cristiane Barbosa; RICARTE, Ivan Luiz Marques. Revisão sistemática da literatura: Conceituação, produção de publicação. *LOGEION: Filosofia da informação*, Rio de Janeiro, v. 6, n. 1, p. 57-73, 2019.

MACHADO, Silvio. Engenharia Didática. In: *Educação Matemática – uma introdução*. Machado, S. (Org.). São Paulo: Educ, 1999, p. 197-208.

MALACARNE, Maicon Felipe; SONE, Ana Paula; FEITEN, Viviane Dohl; CORDEIRO JUNIOR, Joel; BISPO, Camilly Eduarda; COLOGNESE, Luiz Gustavo Marques; DE OLIVEIRA, Thays Aparecida Garbin; DO PRADO, Yasmin Lourenço. Potencializando o ensino de Matemática e Física por meio de práticas inovadoras e transversalidade. *REVISTA FOCO*, [S. l.], v. 16, n. 7, p. e2621, 2023.

OLIVEIRA, Lucas Duarte; RAMOS, Tiago Clarimundo; CARNEIRO, Joaquim Alexandre Santos Almeida Oliveira; LANDI JÚNIOR, Salmon. Conhecimentos de Matemática básica de

graduandos nos anos iniciais de Engenharia: desafios, fragilidades e enfrentamentos possíveis. *Revista BOEM*, Florianópolis, v. 8, n. 16, p. 134–152, 2020.

RAMOS, Altina; FARIA, Paulo M.; FARIA, Ádila. Revisão Sistemática da Literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação. *Revista Diálogo Educacional*, Curitiba-PR, v. 14, n. 41, p. 17-36. 2014.

SYPNIEVSKI, Marianna Del Secchi; SCHUBRING, Gert. O processo histórico de disciplinarização do cálculo infinitesimal no Brasil. *Revemop*, v. 5, p. e202308, 2023.



Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas: uma proposta didática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Change of Coordinates in Multiple Integrals: a didactic proposal in light of the Theory of Semiotic Representation Registers

Resumo: O artigo é orientado pelo objetivo de *analisar dificuldades evidenciadas por estudantes, a partir de um teste diagnóstico, na mudança de registros de representação semiótica em tarefas que envolvem Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas*. Para tanto, foi elaborado e implementado um teste diagnóstico para estudantes do 5º ao 8º período da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros. Os resultados indicam que os estudantes conseguem utilizar o registro gráfico para compreender as questões, mas apresentam dificuldades na transição para o registro algébrico. Isso sugere a necessidade de práticas de ensino que privilegiam a conversão entre registros, com tarefas que integrem visualizações com cálculos algébricos.

Palavras-chave: Cálculo Integral. Mudança de Coordenadas. Registro de Representação Semiótica.

Abstract: This article aims to analyze difficulties demonstrated by students, based on a diagnostic test, in changing registers of semiotic representation in tasks involving Change of Coordinates in Multiple Integrals. To this end, a diagnostic test was developed and implemented for students from the 5th to the 8th period of the Mathematics Degree Program at the State University of Montes Claros. The results indicate that students are able to use the graphic register to understand the questions, but have difficulties in the transition to the algebraic register. This suggests the need for teaching practices that prioritize the conversion between registers, with activities that integrate visualizations with algebraic calculations.

Keywords: Integral Calculus. Change of Coordinates. Record of Semiotic Representation.

2.1 Introdução

As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente nos programas de Matemática e Engenharia, têm enfrentado desafios significativos, refletidos nas elevadas taxas de reprovação e retenção (Irias *et al.*, 2011). Estudantes entrevistados para o estudo aqui apresentado, indicam fatores que contribuiriam para seu baixo desempenho, incluindo a falta de tempo para estudar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, o excesso de estudantes por turma, o tipo de avaliação empregada e a metodologia utilizada pelos professores.

Outros estudos indicam que os estudantes ingressantes no Ensino Superior, frequentemente, chegam com defasagem de formação de conceito elementares, como dúvidas

em relação a equações e funções algébricas, o que dificulta a compreensão de tópicos mais avançados de Cálculo (Rodrigues e Neves, 2019; Macêdo e Gregor, 2020). Essas dificuldades são, especialmente, pronunciadas em tópicos que exigem uma alta capacidade de abstração e a habilidade de transitar entre diferentes formas de representação matemática, como no caso da Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.

O ensino de Cálculo, apesar de sua importância para a formação em áreas como a Matemática, Engenharia e Ciências Aplicadas, tem sido tradicionalmente desafiador para muitos estudantes. A complexidade inerente à disciplina, combinada com a predominância de métodos algébricos formais que, muitas vezes, negligenciam a busca por significados, contribui para a elevada taxa de reprovação. Mota (2021) considera que essas dificuldades transcendem o contexto brasileiro, refletindo um fenômeno global. A autora enfatiza que, além da natureza abstrata do Cálculo, a falta de integração entre aspectos gráficos e analíticos dificulta a compreensão dos conceitos pelos estudantes, resultando em um aprendizado mecânico e superficial. A abordagem tradicional, centrada na memorização de fórmulas e resolução repetitiva de exercícios, não favorece o desenvolvimento de habilidades críticas e a compreensão necessária para a aprendizagem em disciplinas subsequentes.

Ademais, a defasagem de aprendizagem em Matemática, referente à Educação Básica, tem um impacto direto no desempenho dos estudantes em Cálculo. Segundo Rosa *et al.* (2023), a insuficiência na mobilização de conhecimentos prévios, aliada à dificuldade em compreender e aplicar conceitos matemáticos, resulta em um baixo desempenho acadêmico e, em muitos casos, leva à evasão do curso. Essas dificuldades são agravadas por hábitos de estudo inadequados e rotinas de aprendizagem insuficientes, que impedem os estudantes de dedicarem tempo e esforço suficientes para a disciplina (Pessoa, Araujo e Sousa, 2019).

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Duval (2009), oferece uma estrutura teórica que destaca a importância de utilizar múltiplos registros de representação, como gráficos, tabelas, expressões algébricas e diagramas, para a compreensão de conceitos matemáticos e manipulações algébricas. Duval (2009) argumenta que a capacidade de converter e coordenar entre esses registros é importante para a construção de um entendimento matemático. No contexto do Cálculo, especialmente em tópicos como a

Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas, essa abordagem se mostra particularmente relevante.

O estudo aqui apresentado faz parte de uma pesquisa mais ampla em que foram levantadas dificuldades relativas à aprendizagem de Integrais Múltiplas, com uma revisão de literatura. Diante desse contexto, o estudo é orientado pelo objetivo de *analisar dificuldades evidenciadas por estudantes, a partir de um teste diagnóstico, na mudança de registros de representação semiótica em tarefas que envolvem Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas*. A proposta foi desenvolvida com base nas dificuldades e limitações identificadas com a revisão de literatura já realizada. O teste diagnóstico foi implementado a doze estudantes matriculados entre o 5º e 8º período da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros.

É importante destacar que o estudo passou pela análise e aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da universidade, tendo sido considerada aprovada, conforme parecer consubstanciado sob a indicação nº 6.238.670, de 14 de agosto de 2023, e Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) nº 72823723.5.0000.5146, por respeitar os preceitos éticos da pesquisa envolvendo seres humanos.

Além da introdução, que apresenta o tema e contextualiza o leitor quanto ao objetivo do estudo, organizamos o artigo em seções, cada uma abordando: Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas; Contribuições dos Registros de Representação Semiótica; Metodologia; Análise; Integração entre Evidências Teóricas e Resultados Empíricos no Ensino de Mudança de Coordenadas. Ao final, são apresentadas as considerações finais.

2.2 Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas

No estudo das Integrais Múltiplas, a Mudança de Coordenadas é uma técnica que simplifica a resolução de um problema. Esta técnica consiste em transformar as coordenadas de um sistema cartesiano para outros sistemas mais convenientes, como as coordenadas polares, cilíndricas ou esféricas. Essas transformações permitem uma interpretação geométrica da região de integração e, muitas vezes, facilitam os cálculos (Cometti, 2018; Ragoni, 2021). Nesta seção, exploramos o processo de Mudança de Coordenadas, apresentando as expressões de transformação, os jacobianos correspondentes e aplicando esses conceitos a integrais duplas e triplas.

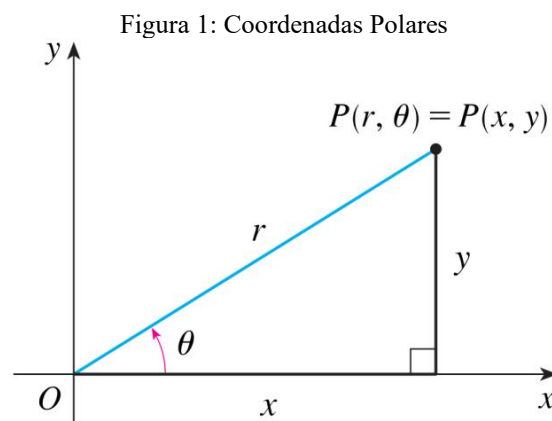
Na mudança de variável em Integrais de uma variável, introduz-se uma nova variável com o objetivo de simplificar o processo de integração, facilitando a avaliação de integrais mais complexas algebricamente. No entanto, esse procedimento, traz uma dificuldade no tratamento de integrais trigonométricas na conversão do sistema algébrico em sistema polar. Esse procedimento ainda envolve a substituição direta da variável original, juntamente com a correspondente adaptação do diferencial. Ainda, pode-se ressaltar que ao se tratar de Integrais Múltiplas, a mudança de variáveis adquire uma complexidade adicional devido ao aumento das dimensões envolvidas. Nesse caso, é fundamental considerar o jacobiano da transformação, o qual permite ajustar corretamente o diferencial. Além disso, a escolha das novas variáveis deve assegurar a preservação das relações geométricas do problema, bem como dos limites de integração, demandando, assim, melhor compreensão da Geometria que envolve o cálculo das integrais.

Retomando o sistema de Coordenadas Polares, segundo Stewart (2013), um ponto P com coordenadas retangulares (x, y) , tem por coordenadas polares (r, θ) , onde r é a distância do ponto P à origem e θ é o ângulo formado pela semirreta positiva das abscissas e do segmento de reta que liga a origem ao ponto P .

Ainda, segundo Stewart (2013), esta Mudança de Coordenadas é dada por

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

onde $r \geq 0$ e θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$, onde θ_0 é um ângulo fixado.



Fonte: Stewart (2013, p. 895)

O jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

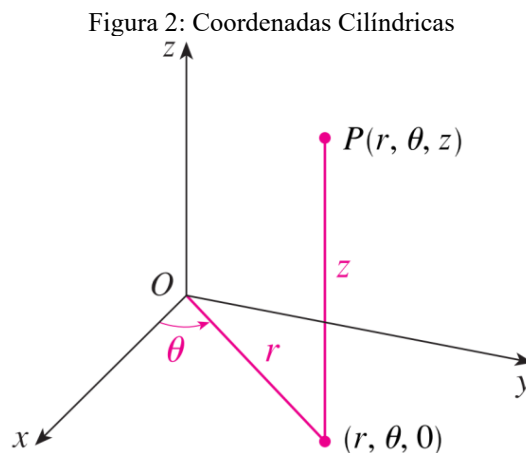
Então, segundo Stewart (2013), se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta) r dr d\theta.$$

Quanto às Coordenadas Cilíndricas, segundo Stewart (2013), um ponto P de coordenadas (x, y, z) tem coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy . Ainda, segundo Stewart (2013), esta Mudança de Coordenadas é dada por

$$g(x, y, z) = (r \cos\theta, r \text{sen}\theta, z)$$

onde $r \geq 0$, θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ e z no intervalo $-\infty < z < +\infty$.



Fonte: Stewart (2013, p. 923)

O jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = r.$$

Então, segundo Stewart (2013), se f é uma função contínua no sólido E , com

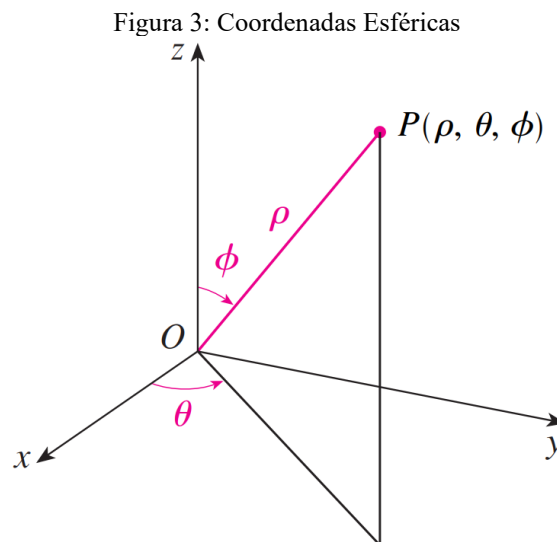
$E = \{(x, y, z); (x, y) \in R, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$, então

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} \int_a^\beta \int_a^b (r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Já para as Coordenadas Esféricas, conforme Stewart (2013), um ponto P de coordenadas retangulares (x, y, z) tem por coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) , onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelos valores positivos da abcissa e o segmento de reta que liga $(0,0)$ a (x, y) , e ϕ é o ângulo formado pelos valores positivos da cota e o segmento de reta que liga P à origem. Ainda segundo Stewart (2013) esta Mudança de Coordenadas é dada por

$$g(x, y, z) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)$$

onde $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$.



Fonte: Stewart (2013, p. 927)

Neste caso, o jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi.$$

Logo, se f é contínua em Q

$$\iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\theta d\phi$$

onde Q é uma cunha esférica dada por $Q = \{(\rho, \theta, \phi); a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$.

A Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas não apenas simplifica os cálculos, mas também proporciona uma melhor compreensão da Geometria envolvida (Cometti, 2018). Ao dominar essas técnicas, é possível resolver determinados problemas de forma mais eficiente e compreender melhor as relações entre diferentes sistemas de coordenadas (Menoncini, 2018).

2.3 Contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

O embasamento teórico adotado no estudo é a Teoria de Registro de Representações Semióticas (TRRS) proposta por Raymond Duval. Essa teoria cognitiva analisa as dificuldades associadas à aprendizagem da Matemática, explorando o funcionamento cognitivo referente aos seus conceitos. A TRRS considera o modo de acesso aos objetos matemáticos, a variedade de sistemas semióticos que possibilitam suas representações e a necessária distinção entre o objeto matemático e sua representação.

De acordo com Duval (2009), a principal complexidade na aprendizagem da Matemática deriva do fato de que os objetos matemáticos carecem de existência física, ou seja, não podem ser diretamente percebidos pelos sentidos como ocorre com os objetos do mundo real. Assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de sistemas semióticos. Na Matemática, mais do que em qualquer outra área do conhecimento, a diversidade de sistemas semióticos é crucial para a formação de novos conceitos.

Duval (2011) define um sistema semiótico como um conjunto de signos organizados conforme regras próprias de formação e convenções, capaz de produzir e transmitir informações. Para designar os sistemas semióticos específicos da Matemática, o autor utiliza o termo *registro*. Segundo ele, um registro de representação é um sistema semiótico que desempenha funções cognitivas de objetivação (compreensão para si) e tratamento, além da função de comunicação.

O autor categoriza quatro tipos de registros de representação na Matemática: língua materna, sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), gráficos cartesianos e figuras geométricas. A diversidade de sistemas semióticos permite a multiplicidade de representações de um mesmo objeto, enriquecendo as capacidades cognitivas dos estudantes (Denardi, 2019).

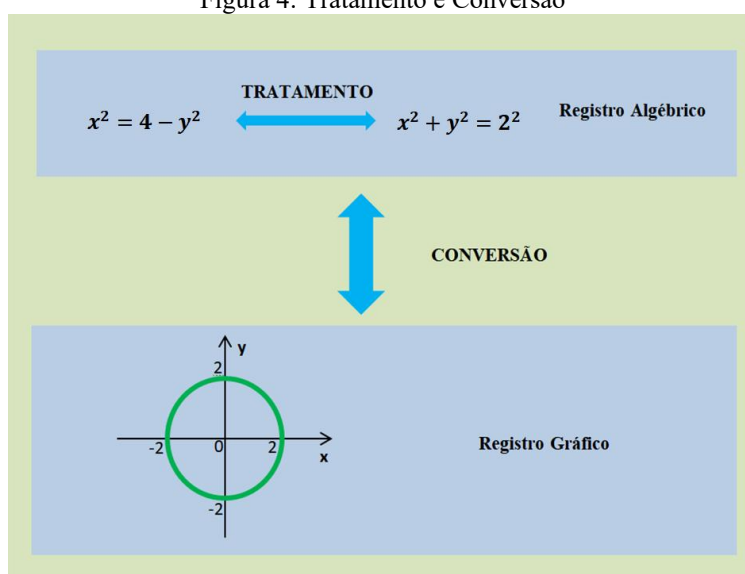
Duval (2009) destaca que o conhecimento matemático se transforma em saber quando ocorre a mobilização espontânea pelos estudantes, de diferentes registros semióticos de um mesmo objeto matemático. No entanto, ressalta que

a passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e estudantes. Estes, frequentemente não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes [...] (Duval, 2009, p. 18).

Segundo Duval (2009), para compreender a aquisição conceitual com a mobilização e coordenação dos registros de representação, é preciso trabalhar com duas atividades cognitivas: o tratamento e a conversão. O *tratamento* refere-se à transformação de representações dentro do mesmo sistema de registro, enquanto a *conversão* envolve a transformação entre registros diferentes. Duval (2009) destaca a importância da atividade de conversão para a aprendizagem matemática, complementando a ênfase tradicional dada ao tratamento.

Para destacar a distinção entre as transformações nos registros de representação, ilustramos, na Figura 4, um exemplo de tratamento associado a uma conversão.

Figura 4: Tratamento e Conversão



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Duval (2009, p. 17) sublinha a lei fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento: “Não há *noésis* (aquisição conceitual de um objeto) sem *semiósis* (apreensão ou produção de uma representação semiótica)”. Isso ressalta a necessidade de recorrer a sistemas semióticos para adquirir conceitos matemáticos.

Conforme destacado por Jahn e Karrer (2004), a compreensão de um objeto matemático por parte do estudante é diretamente influenciada pelo número de registros mobilizados e relacionados durante o estudo.

[...] a aprendizagem de um conceito matemático consiste em desenvolver coordenações progressivas entre vários sistemas de representação semiótica. [...] Desta forma, na concepção desse autor, o entendimento matemático depende, então, da mobilização de vários registros e, por consequência, um indivíduo aprende matemática se ele integra, em sua arquitetura cognitiva, todos os registros necessários como novos sistemas de representação (Jahn e Karrer, 2004, p. 16-17).

Dentro desse contexto, torna-se evidente que, para Jahn e Karrer (2004), a coordenação eficiente entre os registros é tão importante quanto a conversão entre eles. A habilidade de visualizar o mesmo objeto matemático representado nos diferentes registros é fundamental. Quanto mais fluida e tranquila essa coordenação, maior a capacidade do estudante de distinguir o objeto da sua representação.

Seguindo a abordagem de Duval (2009) no trabalho com as representações de objetos

matemáticos, é importante que o estudante não confunda o objeto com suas representações, mas sim que o reconheça em cada uma delas. Essa distinção é vital para a correta assimilação dos conceitos matemáticos.

Na próxima seção apresentaremos a estrutura metodológica do estudo que considera aspectos da Engenharia Didática.

2.4 Metodologia: Engenharia Didática

De acordo com Artigue (1996), a concepção de Engenharia Didática teve origem no campo da Didática da Matemática, com influência francesa, nos primeiros anos da década de 1980, com o intuito de enfatizar uma abordagem específica no ensino. A Engenharia Didática adota uma abordagem cuidadosa na organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa, abrangendo desde a teoria até a prática experimental. Essa habilidade de integrar a pesquisa (aspecto teórico) com a prática educativa (aspecto experimental) é destacada como uma das vantagens distintivas dessa metodologia de investigação. Artigue (1996) descreve que nessa forma de trabalho o papel do professor/pesquisador é

comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos muito mais complexos do que os objectos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar (p. 193).

Artigue (1996) ressalta, adicionalmente, que a Engenharia Didática se distingue pela documentação dos estudos realizados e pelo método de validação adotado. A diferença entre as pesquisas que adotam a Engenharia Didática e outras abordagens experimentais em ambientes educacionais reside principalmente no modelo de validação empregado.

De acordo com Artigue (1996), a Engenharia Didática consiste em quatro fases que não necessariamente seguem uma sequência linear. Em certos momentos, é necessário que esses elementos sejam articulados e até mesmo superpostos para uma melhor condução do processo. A fase inicial de análise visa entender o contexto do ensino, identificando obstáculos que dificultam a aprendizagem. Com base nisso, na concepção e análise *a priori*,

tarefas são elaboradas, antecipando reações e dificuldades dos estudantes. Na fase de experimentação do estudo foram implementadas essas tarefas, ajustando-as conforme a interação dos estudantes. Finalmente, na análise *a posteriori*, os dados são comparados com as previsões iniciais, permitindo validar ou ajustar hipóteses e fornecendo subsídios para futuras intervenções.

Este artigo, em particular, aborda exclusivamente a segunda fase, em que Artigue (1996) destaca que para compreensão desta fase da Engenharia Didática, é útil distinguir dois tipos de variáveis de controle:

- as variáveis macro-didáticas ou globais, que dizem respeito à organização global da engenharia; - e as variáveis micro-didáticas ou locais, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado (Artigue, 1996, p.202).

Artigue (1996) ressalta que essa fase deve ser vista como uma avaliação do controle do significado. Esse aspecto é importante, pois a teoria construtivista enfatiza o compromisso do estudante na construção de conhecimento por meio de interações com o ambiente. A Teoria das Situações Didáticas, que embasa a metodologia da Engenharia Didática, desde seu início, busca estabelecer-se como uma teoria sobre o controle das relações entre significado e contexto.

Com base nesses pressupostos e com o objetivo de atender às necessidades específicas do nosso contexto, adaptamos a fase de desenho. Nessa etapa, elaboramos e implementamos um teste diagnóstico com base nas dificuldades identificadas na fase anterior. O intuito é obter novas informações ou confirmar as informações já apontadas pela literatura.

Quanto ao teste diagnóstico, no que se refere à abordagem do problema, o estudo é de natureza qualitativa. Minayo (2014) ressalta que a pesquisa qualitativa se ocupa de uma realidade que não pode, ou não deveria, ser quantificada, concentrando-se na compreensão e na explicação da dinâmica das relações sociais. O objetivo não é mensurar com números ou dados obtidos a partir de questionários ou entrevistas, por exemplo. Em vez disso, busca entender aspectos mais subjetivos, como comportamentos, ideias, pontos de vista, entre outros.

Para a realização, elaboramos um teste diagnóstico, implementado com estudantes do 5º ao 8º período da Licenciatura em Matemática da Unimontes. Essa escolha se deu pelo fato

de estes estudantes já terem cursado, no 4º período, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, na qual são abordados, conforme a ementa⁶ do curso, os tópicos de integração dupla, integração tripla e Mudança de Coordenadas. A implementação do teste ocorreu no dia 9 de maio de 2024, em 3 horas/aula. Todos os estudantes receberam o material impresso. A resolução do teste aconteceu com a presença do pesquisador. Os estudantes receberam um Prefácio com os resultados matemáticos necessários para realização do teste (Apêndice 1). Utilizou-se observação sistemática e anotações de narrativas dos estudantes durante a resolução.

Para análise posterior, foram recolhidos todos os registros escritos da turma, sem optar por recursos de gravações de áudio. Participaram das atividades, 12 estudantes que aceitaram o convite. Eles foram orientados quanto aos objetivos do estudo e informados que suas identidades seriam preservadas em consonância aos princípios éticos adotados nas pesquisas com seres humanos.

Sendo assim, o teste diagnóstico constituiu o principal instrumento de produção de dados, nesta fase. Durante a resolução das tarefas, observamos atentamente a participação, o envolvimento com as tarefas e o diálogo estabelecido entre os estudantes. Para preservar a identidade dos participantes e visando acompanhar o processo de construção do conhecimento de cada um deles, seus registros foram numerados, de forma aleatória, de 1 a 12, sendo, portanto, identificados como A1, A2, A3, ..., A12. Os resultados são apresentados na próxima seção.

Como o foco da pesquisa está no ensino e na aprendizagem das mudanças de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas, apoiadas pela TRRS, cada questão foi formulada para avaliar a habilidade dos estudantes em empregar essas mudanças para resolver problemas de cálculo em uma diversidade de variáveis. Além disso, as tarefas, presentes no teste diagnóstico, também visam avaliar a capacidade de interpretação, tradução e representação de tarefas em múltiplos registros de representação. A seguir, apresentamos as tarefas que

⁶ Ementa: Integração dupla. Integração tripla. Mudança de coordenadas. Integrais de linha. Diferenciais exatas e independência de caminhos. Análise vetorial: teoremas de Green, Gauss e Stokes. Disponível em https://unimontes.br/wp-content/uploads/2019/11/resolucao_cepex150.pdf; consultado em 12 mar. 2024.

contemplaram o Teste diagnóstico, bem como seus objetivos que estão alinhados à TRRS:

1. Sendo R a região do plano cartesiano que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. Calcule

$$\iint_R (x + y) dA.$$

Objetivo: Avaliar a habilidade do estudante em: 1) identificar e interpretar graficamente a região de integração (registro gráfico); 2) traduzir a região delimitada por circunferências no plano cartesiano para coordenadas; 3) calcular a integral dupla na nova representação (registro algébrico).

2. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste a oeste e cresce linearmente de um metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Determine o volume da piscina.

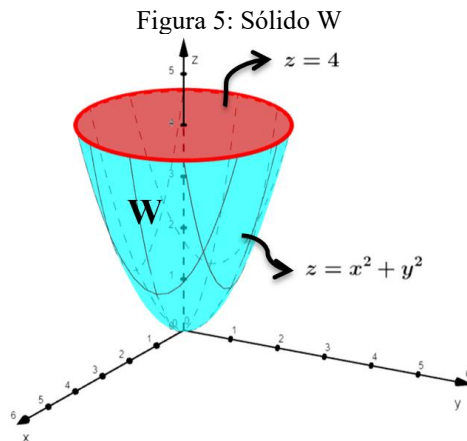
Objetivo: Avaliar a habilidade do estudante em: 1) representar graficamente o perfil da piscina e a variação da profundidade (registro gráfico); 2) traduzir essa descrição para uma Integral em coordenadas polares e calcular o seu volume (registro algébrico).

3. Seja W uma região limitada pelos planos $z = -2$, $z = 4$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$. Calcule

$$\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2} dV.$$

Objetivo: Avaliar a habilidade do estudante em: 1) visualizar e desenhar a região delimitada pelos planos e cilindro (registro gráfico); 2) converter a descrição da região para coordenadas cilíndricas; 3) calcular a integral tripla utilizando as novas coordenadas (registro algébrico).

4. Determine, por integral tripla, o volume do sólido W :



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Objetivo: Avaliar a habilidade do estudante em: 1) identificar os limites de integração a partir da representação gráfica do sólido (registro gráfico); 2) traduzir essa representação para uma integral tripla em coordenadas cilíndricas; 3) calcular o volume do sólido (registro algébrico).

5. Qual o volume do sólido limitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e abaixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$?

Objetivo: Avaliar a habilidade do estudante em: 1) visualizar e representar graficamente a região delimitada pela esfera e cone (registro gráfico); 2) converter a descrição do sólido para coordenadas esféricas; 3) calcular a integral tripla utilizando coordenadas esféricas para encontrar o volume (registro algébrico).

Na próxima seção, apresentamos as análises das respostas do teste diagnóstico.

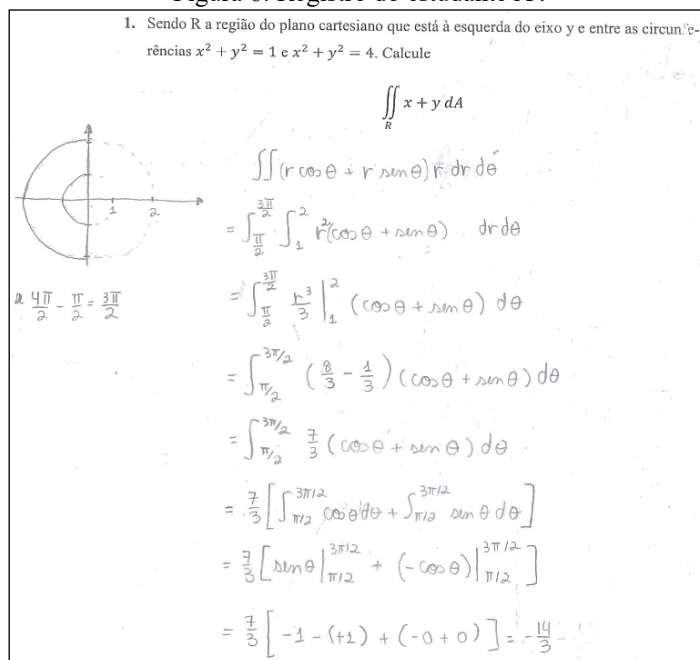
2.5 Análise das Resoluções do Teste Diagnóstico

Como nosso propósito foi investigar o nível de conhecimento matemático dos estudantes na conversão entre diferentes registros de representação semiótica e no tratamento desses objetos, direcionamos nossa atenção para os registros escritos dos estudantes. Com base no referencial teórico das representações semióticas e de pesquisas realizadas nessa temática como as de Cometti (2018), Menoncini (2018) e Mota (2021), elaboraremos nossas análises.

Na primeira tarefa, os estudantes tiveram que realizar uma Mudança de Coordenadas Cartesianas para Coordenadas Polares para facilitar a integração em uma região delimitada por circunferências. Dentre os 12 participantes, 8 deles conseguiram realizar a primeira tarefa. Dentre eles, destacamos os registros realizados pelo estudante A4.

Figura 6: Registro do estudante A4

1. Sendo R a região do plano cartesiano que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. Calcule



$$\iint_R x + y \, dA$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (r \cos \theta + r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{r^3}{3} \right|_1^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7}{3} (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta$$

$$= \frac{7}{3} \left[\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \right]$$

$$= \frac{7}{3} \left[\sin \theta \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (-\cos \theta) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \frac{7}{3} \left[-1 - (+1) + (-0 + 0) \right] = -\frac{14}{3}$$

Fonte: Dados do estudo (2024).

Como base nesses registros, inferimos que o estudante compreendeu o enunciado com representação em língua natural; realizou a conversão para o registro gráfico, em que os dados do enunciado são traduzidos em um registro visual, realizado pelo estudante, do mesmo objeto. Adicionalmente, ocorre uma conversão para o registro algébrico, o estudante realizou o tratamento nesse registro, soube empregar a Mudança de Coordenadas Polares e realizar as operações necessárias, mostrando domínio de conteúdo matemático em cada um dos registros envolvidos nessa resolução. Percebemos que, ao destacar a região de integração, no registro gráfico, o estudante identifica apenas as curvas, quando a região entre elas também deveria ser destacada, uma vez que a integral está sendo calculada sobre essa região.

Ressaltamos que os participantes que realizaram essa tarefa poderiam ter empregado a língua natural para comunicar o resultado. Contudo, podemos inferir que mostraram domínio dos objetos do conhecimento em estudo, uma vez que conseguiram transitar entre, pelos menos, dois registros diferentes, quais sejam, algébrico e gráfico. Conforme discute Duval (2009), o estudante aprendeu o conteúdo quando ele consegue transitar com facilidade entre

diversas representações de um mesmo objeto, realizando a conversão e o tratamento adequado, obedecendo as normas e procedimentos internos a cada registro utilizado. “A questão da coordenação dos registros e os fatores suscetíveis de favorecer esta coordenação aparecem então como questões centrais para as aprendizagens intelectuais” (Duval, 2009, p. 39).

A segunda tarefa envolvia o emprego de Coordenadas Polares para modelar e calcular a medida do volume de um sólido com profundidade variável. Apenas o estudante A4 conseguiu modelar e realizar os passos exigidos para chegar à solução.

Figura 7: Registro do estudante A4

2. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste para oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina.

Pessoal dividir em duas situações
 1 piscina regular de 1 m de profundidade
 2 a outra com variação da profundidade

Regular
 $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot 1 = 25\pi \text{ m}^3$ $x^2 + y^2 = 25$

$y = 0,1x + 1$
 $0,1(r \cos \theta) + 1$

$\int_0^{2\pi} \int_0^5 r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$

$\int_0^{2\pi} \int_0^5 r^2 \Big|_0^5 \cdot d\theta$

$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \cdot (0,1 \cos \theta + 1) \right]_0^5 d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{0,1 \cdot 125}{3} \cdot 0,1 \cos \theta + 5 \right] d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1,25}{3} \cos \theta + 5 \right] d\theta$

$= \left[\frac{1,25}{3} \sin \theta + 5\theta \right]_0^{2\pi} =$

$25\pi + 12,5\pi = 37,5\pi$

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Com base no registro do estudante A4, inferimos que o estudante entendeu o enunciado em língua natural e realizou a conversão para o registro gráfico, efetuando um tratamento nesse registro. Observamos que o estudante representa a piscina, mencionada na tarefa, de forma tridimensional e, em seguida, projeta a variação da profundidade dessa piscina no plano, para encontrar a equação da reta correspondente a essa variação. Posteriormente, o estudante realiza uma nova conversão para o registro algébrico, empregando os tratamentos necessários nesse registro para determinar o resultado esperado.

Percebemos na resolução do estudante A4 o uso do registro em língua natural para explicar sua estratégia de resolução.

Na segunda tarefa, identificamos que os estudantes apresentaram dificuldades em realizar a conversão entre o registro em língua natural e os demais registros de representação. Apenas um estudante conseguiu representar corretamente a região descrita no enunciado da tarefa. Durante a implementação surgiram murmurinhos na turma quanto à dificuldade de interpretar essa tarefa. Os relatos a seguir, do estudante A12 e do diário de campo do pesquisador, expõem esse momento da pesquisa:

Achei a questão 2 difícil, não consigo interpretar o enunciado. Acho que será a única que não irei fazer algo. Quando li a primeira vez pensei que seria uma questão fácil de volume, mas não consigo representar essa região (Enunciação do estudante A12, 2024).

O estudante A12 relata a dificuldade em interpretar o enunciado da tarefa, especialmente no que diz respeito à representação da região envolvida. Inicialmente, o estudante acredita que a questão seria simples, provavelmente porque associa a tarefa à resolução de um problema de cálculo de medida de volume que, para ele, já devia ser familiar. No entanto, a verdadeira dificuldade surge quando esse estudante tenta representar a região descrita, o que indica uma dificuldade na conversão entre registros de representação semiótica, como o registro em língua materna e o registro gráfico.

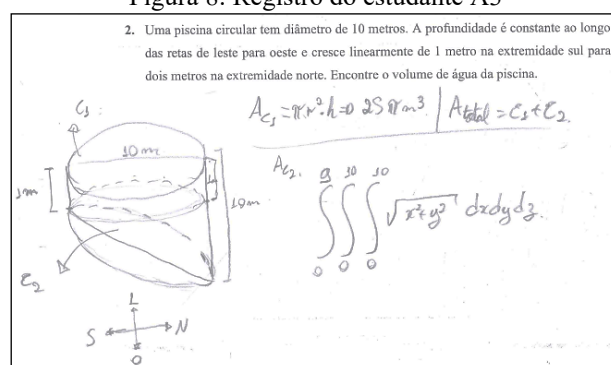
De acordo com Duval (2012, p. 270), “o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações”. No caso do Estudante A12, a dificuldade em representar a região mostra uma falta de coordenação entre os registros, o que é essencial para a compreensão completa do problema. O estudante parece compreender a questão em termos gerais (volume), mas enfrenta dificuldades em converter as informações do registro em língua materna para o registro de representação gráfica.

Essa dificuldade pode ser compreendida à luz do que Duval (2009, p. 63) considera como “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos”. A conversão entre o registro de linguagem natural (o enunciado da tarefa) e o registro gráfico (a representação da região) é o ponto crítico em que o Estudante A12 encontra dificuldade. Isso sugere que tarefas

que promovam a prática e a coordenação entre diferentes registros de representação poderiam ajudar a superar tais dificuldades.

A resolução do estudante A3, apresentada na Figura 8, exemplifica uma tentativa de representar a região de integração, na qual ele divide a região em duas, mas falha na variação da profundidade da piscina, mencionada no enunciado da tarefa. Isso evidencia que, ao realizar a conversão do registro em língua natural para o registro gráfico, o estudante verificou que haveria variação em relação à medida da profundidade da piscina. No entanto, não conseguiu determinar corretamente qual seria essa variação.

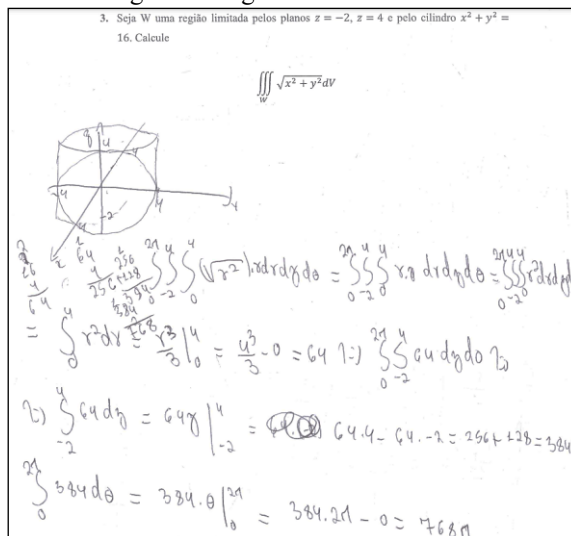
Figura 8: Registro do estudante A3



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Na terceira tarefa, que exigia o uso de Coordenadas Cilíndricas para calcular a medida do volume do sólido, utilizando uma integral tripla em uma região tridimensional, apenas três estudantes conseguiram apresentar resoluções, os demais não apresentaram resolução. O estudante A8, por exemplo, realizou a conversão do registro algébrico, presente no enunciado da tarefa, para o registro gráfico; em seguida, fez uma nova conversão para o registro algébrico, fazendo a Mudança de Coordenadas Cilíndricas e os cálculos necessários. O estudante cometeu um erro ao deixar de dividir 64 por 3 (erro localizado na segunda linha do registro). Ele mostrou domínio do conteúdo ao conseguir realizar conversão entre três tipos de registros. Nesse caso, o erro aconteceu no registro numérico, quando se tratava de realizar uma operação aritmética elementar. Isso sugere que, enquanto o estudante era capaz de manipular registros complexos, houve um descuido ou lapso em operações básicas. Isso evidencia que como a atenção do estudante estava voltada para as etapas de conversão, a precisão nos cálculos finais pode ter sido comprometida.

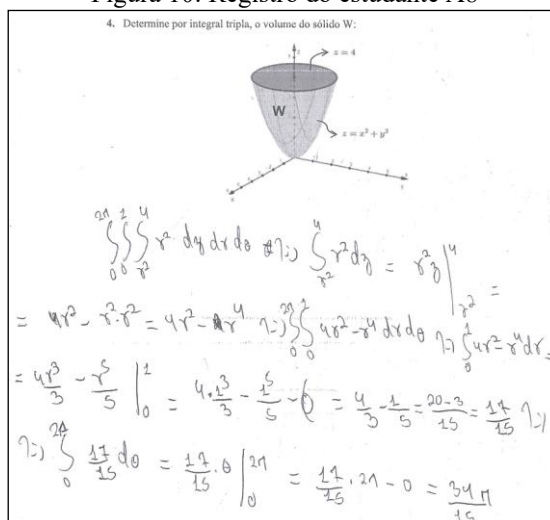
Figura 9: Registro do estudante A8



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Na quarta tarefa, os estudantes precisavam determinar a medida do volume de um sólido a partir de sua representação gráfica, utilizando Coordenadas Cilíndricas. Entre os participantes, apenas cinco apresentaram uma resolução para o problema. Destes, somente dois conseguiram identificar corretamente os limites de integração, mostrando habilidade em converter a informação do registro gráfico para o algébrico. Além disso, esses dois estudantes mostraram competência em realizar o tratamento algébrico necessário para resolver a questão. Dentre as resoluções apresentadas, destacamos, na Figura 10, a solução do estudante A8.

Figura 10: Registro do estudante A8



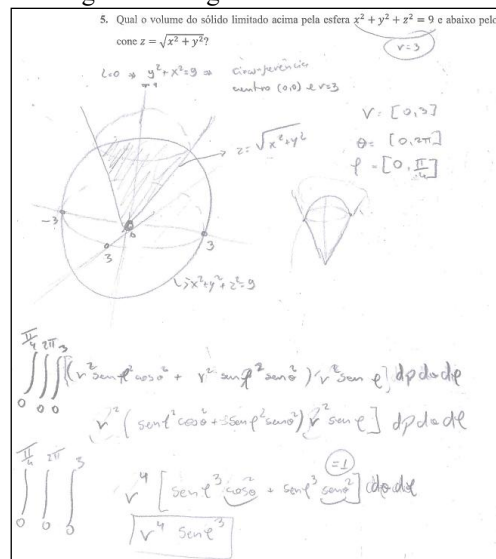
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Essa dificuldade sugere que a maioria dos estudantes enfrentam desafios significativos

ao trabalhar com representações gráficas e na transição para o registro algébrico. Isso indica uma necessidade de reforço no ensino desses conceitos e de sua manipulação operacional, especialmente no que diz respeito à interpretação e conversão entre diferentes registros matemáticos. A capacidade de identificar corretamente os limites de integração é parte fundamental na realização de integrais e a dificuldade encontrada por parte dos estudantes pode impactar negativamente seu desempenho em tarefas futuras que exigem uma compreensão dessas técnicas.

Na quinta e última tarefa, que envolve o uso de Coordenadas Esféricas para determinar a medida do volume de sólido delimitado por superfícies esféricas e cônicas, apenas os estudante A12, apresentou resolução (Figura 11).

Figura 11: Registro do estudante A12



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

O estudante usou o registro gráfico para esboçar a região de integração, fazendo assim uma conversão entre o registro algébrico e gráfico, em seguida, montou a integral usando a Mudança de Coordenadas Esféricas, utilizando o registro algébrico em uma nova conversão, além disso o estudante realiza manipulações algébricas. Apesar de não ter encontrado a resposta correta, o estudante mostrou dominar o conteúdo ao conseguir percorrer por três registros de representação de forma correta. A capacidade de A12 em realizar manipulações algébricas indica que o estudante é capaz de fazer tratamentos dentro do registro algébrico.

Isso é um indicativo de compreensão e habilidade matemática com o registro de tratamento considerado com menos dificuldades em relação ao registro de conversão, mesmo que a resposta final não tenha sido correta.

Em resumo, a análise das resoluções revela uma tendência comum entre os estudantes: pelo menos oitos estudantes conseguem utilizar o registro gráfico para compreender a questão, mas falham na transição para o registro algébrico. Isso sugere a necessidade de práticas de ensino focadas em fortalecer essa conversão entre registros, possivelmente com tarefas que integrem visualizações com cálculos algébricos passo a passo. O trabalho com múltiplos registros de representação, conforme proposto por Duval (2009), é importante para a compreensão de conceitos matemáticos. São importantes as situações de aprendizagem que enfatizem essas transições, utilizando representações múltiplas e explícitas para melhorar a fluência entre os diferentes registros semióticos. A importância da integração de diferentes registros e da utilização de metodologias inovadoras é corroborada pelos estudos de Menoncini (2018), Silva (2019), Thieghi (2021) e Almeida (2021).

2.6 Integração entre Evidências Teóricas e Resultados Empíricos nos Processos de Ensino e de Aprendizagem de Mudança de Coordenadas

Esta seção busca articular os principais achados da revisão bibliográfica, realizada no estudo preliminar da pesquisa (Artigo 1), com os resultados obtidos a partir das análises das resoluções dos estudantes no teste diagnóstico, conforme descrito neste artigo. Essa comparação visa destacar as convergências e divergências entre as evidências teóricas e os dados empíricos, evidenciando implicações para a prática educativa no ensino de Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. A análise enfatiza aspectos críticos que podem influenciar a compreensão dos estudantes, além de sugerir estratégias pedagógicas eficazes para abordar essas transformações geométricas no contexto das Integrais.

Estudos prévios destacam que as dificuldades na visualização geométrica e na compreensão dos processos de integração limitam a formação de conceitos e que a conversão entre diferentes registros de representação semiótica, especialmente entre os registros gráfico e algébrico, representa uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos estudantes. Cometti (2018) e Ragoni (2021) apontam que essa conversão é uma das atividades cognitivas mais desafiadoras no ensino de Cálculo. O uso de tecnologias digitais, como o GeoGebra, foi destacado por Thieghi (2021) e Ragoni (2021) como uma ferramenta capaz de facilitar essa

conversão, ajudando os estudantes a visualizarem e interagirem com as superfícies envolvidas, o que potencializa a compreensão dos conceitos envolvidos. A integração dessas tecnologias no ensino visa fortalecer a habilidade dos estudantes em transitar entre representações visuais e algébricas, conforme discutido por Silva (2019) e Rocha (2019), que enfatizam a importância de práticas de ensino que incentivem o uso de múltiplos registros de representação.

Os resultados do teste diagnóstico implementado aos estudantes, conforme analisado, corroboram, em parte, as evidências teóricas relatadas na literatura. Os resultados revelaram que a transição entre sistemas de coordenadas, como cartesianas para polares ou cilíndricas, ainda apresentam desafios significativos. A falta de uma base sólida em conceitos prévios de Álgebra e Geometria também foi apontada como uma dificuldade recorrente.

Na primeira tarefa, por exemplo, que exigia a conversão de uma região delimitada por circunferências do Plano Cartesiano para Coordenadas Polares, oito dos doze estudantes conseguiram realizar o cálculo da Integral Dupla, mas muitos apresentaram dificuldades na representação gráfica correta da região de integração, como também identificou Cometti (2018) em seu estudo. Isso mostra a dificuldade que os estudantes enfrentam ao realizarem a transição entre os registros gráficos e algébricos, como também discute Duval (2009), que destaca a complexidade dessa conversão como uma das atividades cognitivas menos espontâneas e mais difíceis de adquirir.

Na segunda tarefa, que envolvia a medida do cálculo do volume de uma piscina circular com profundidade variável utilizando coordenadas polares, os resultados evidenciam essa dificuldade. Apenas um estudante conseguiu realizar a conversão correta do registro gráfico para o algébrico. Essa limitação reforça a necessidade, identificada por Thieghi (2021) e Cometti (2018) em seus estudos, de fortalecer o trabalho com múltiplos registros e o uso de tecnologias que possibilitem a visualização de situações tridimensionais complexas. As tecnologias digitais, como o GeoGebra, desempenham um papel importante ao auxiliar os estudantes na visualização e manipulação de representações tridimensionais.

Os resultados da terceira tarefa, que exigia o uso de coordenadas cilíndricas para

calcular a medida do volume de um sólido, continuaram a reforçar essas dificuldades. Três estudantes conseguiram realizar a conversão entre os registros gráficos e algébricos. Essa dificuldade foi também identificada nos estudos feitos por Silva (2019) e Rocha (2019), que discutem como a transição para a compreensão de formas tridimensionais é um desafio no ensino de Cálculo. Ragoni (2021) aponta que a falta de prática com representações tridimensionais e sua conversão para o registro algébrico limita a fluência dos estudantes na resolução de problemas, o que foi evidenciado nessa tarefa.

Na quarta tarefa, que envolve a determinação dos limites de integração para uma região tridimensional, apenas dois estudantes conseguiram realizar, corretamente, a transição entre os registros gráficos e algébricos. Isso corrobora as observações de Cometti (2018), que enfatiza a dificuldade em coordenar múltiplos registros de representação, especialmente em contextos tridimensionais. Mota (2021), em seu estudo, discute que a coordenação de registros visuais e algébricos é essencial para a construção do conhecimento matemático e que práticas pedagógicas devem promover essa transição de forma contínua.

A quinta e última tarefa, que envolve o uso de coordenadas esféricas para calcular o volume de um sólido delimitado por uma esfera e um cone, revelou-se o maior desafio para os estudantes. Apenas um participante conseguiu realizar, corretamente, a conversão entre o registro gráfico e o algébrico, o que evidencia a complexidade do problema. Isso confirma as observações de Cometti (2018), que discute a necessidade de desenvolver habilidades de visualização tridimensional e fluência na manipulação de representações complexas. Essa tarefa, em particular, mostrou como a falta de prática e de ferramentas adequadas para visualização tridimensional impactam diretamente no desempenho dos estudantes.

Os resultados do teste diagnóstico refletem as dificuldades teóricas identificadas na revisão bibliográfica, evidenciando a necessidade de práticas de ensino que integrem tecnologias digitais para facilitar a transição entre registros de representação semiótica. Thieghi (2021), Almeida (2021) e Pavanelo e Lima (2017) defendem que o uso de ferramentas como o GeoGebra pode auxiliar na superação dessas dificuldades cognitivas, ao permitir que os estudantes visualizem e interajam com as superfícies de integração de maneira dinâmica. A interatividade e o dinamismo proporcionados por essas tecnologias tornam o processo de aprendizagem mais fluido e envolvente, possibilitando uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos nas Mudanças de Coordenadas e Integrais Múltiplas.

2.7 Considerações finais

O estudo apresentado visou investigar a capacidade dos estudantes em transitar entre diferentes registros de representação semiótica durante a resolução de problemas envolvendo Integrais Múltiplas, utilizando sistemas de Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas. Essa investigação revelou as dificuldades e competências dos estudantes, que são essenciais para aprimorar as práticas de ensino de Cálculo Integral em cursos de Licenciatura em Matemática.

Inicialmente, observou-se que a maioria dos estudantes conseguem utilizar o registro gráfico para compreender os problemas propostos, evidenciando uma facilidade em visualizar as regiões de integração. No entanto, foi identificado que outros enfrentam desafios significativos ao converter esses registros de representação gráfica em registros algébricos, o que indica uma dificuldade em manipular expressões matemáticas dentro do contexto tridimensional. Esse resultado sugere que, apesar de os estudantes terem uma boa intuição visual, a transição para uma formulação mais abstrata, necessária para a solução algébrica dos problemas, ainda requer maior ênfase nas práticas educativas.

Esses achados corroboram com a TRRS, que postula que a compreensão matemática plena exige a fluência na conversão entre diferentes registros. A dificuldade observada na conversão do registro gráfico para o algébrico aponta para a necessidade de desenvolver tarefas que promovam essa transição de forma mais assertiva. Tarefas que integrem visualizações com cálculos algébricos passo a passo podem ser especialmente úteis para solidificar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Os resultados nos fazem refletir na hipótese de que as tecnologias educacionais, como o GeoGebra, podem auxiliar na visualização e manipulação das Integrais Múltiplas em diferentes sistemas de coordenadas. O uso de tais ferramentas pode permitir aos estudantes explorar os conceitos matemáticos de forma mais interativa e dinâmica, o que pode facilitar a compreensão dos conteúdos e estimular o interesse pela Matemática. No entanto, é necessário que os professores estejam preparados para integrar essas tecnologias de forma eficaz no currículo, garantindo que seu uso esteja alinhado com os objetivos de aprendizagem e que os estudantes sejam orientados a utilizá-las como complemento, e não como substituto, para o

pensamento crítico e analítico.

Esse estudo levanta questões importantes para pesquisas futuras. Uma delas diz respeito à investigação de estratégias pedagógicas que possam melhorar a conversão entre os registros de representação semiótica, particularmente entre os registros gráficos e algébricos. Outra linha de pesquisa relevante diz respeito a explorar o impacto do uso de tecnologias educacionais no desenvolvimento dessas habilidades, avaliando o uso de diferentes ferramentas e abordagens no ensino de Cálculo.

Por fim, o estudo contribui para a compreensão das dificuldades e desafios enfrentados pelos estudantes no emprego de Integrais Múltiplas em diferentes sistemas de coordenadas, destacando a importância da fluência entre diferentes registros de representação semiótica. As implicações didáticas discutidas oferecem subsídios para a implementação de práticas educacionais, que podem levar a uma melhoria na compreensão dos conceitos matemáticos e na capacidade dos estudantes de resolver problemas complexos no campo da Matemática.

2.8 Referências

ALMEIDA, Carolina Ribeiro de. *Gestão de Tarefas e Desenvolvimento de Crivos de Superfícies Utilizando o software Maple: Uma Proposta para o estudo de Cálculo de Integrais Múltiplas no Ensino Superior*. 2021 206 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Estadual De Santa Cruz. Ilhéus.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didáctica, In: BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-364.

COMETTI, Antônio Márcio. *Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no cálculo de várias variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem*. 2018. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto.

DENARDI, Vânia Bolzan. *Contribuições das representações semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e integral por alunos de um curso de licenciatura em Matemática*. 2019. 285f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

IRIAS, Diánis Ferreira; VIEIRA, Josislei Passos; MIRANDA, Paula Reis de; SILVA, Rafael Cazal; Cálculo Diferencial e Integral: analisando as dificuldades dos alunos de um curso de licenciatura em matemática. *Revista de Educação Matemática da UFOP*, Vol I., 2011.

JAHN, Ana Paula; KARRER, Monica. Transformações lineares nos livros didáticos: uma análise em termos de registros de representação semiótica. *Educação matemática em revista*, Recife/PE, Ano 11, n.17, p.16-28, 2004.

MACÊDO, Josué Antunes; GREGOR, Isabela Cristina Soares. Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1–24, 2020.

MENONCINI, Lucia. *O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área*. 2018. 228 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

MOTA, Janine Freitas. *Um estudo ontossemiótico sobre os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática*. 2021. 291f Tese (Doutorado em Educação Matemática) Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

PAVANELO, Elisângela.; LIMA, Renan. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 31, n. 58, p. 739–759, 2017.

RAGONI, Vitor Ferreira. 2021. *Expandindo telas e contando experiências em educação matemática com o geogebra: da sensibilidade do toque à produção de conceitos de integrais duplas com o smartphone*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande.

ROCHA, Fredson Valois Coutinho da. *A utilização do GeogGebra no estudo dos conceitos de limite, derivada e integral definida*. 2019 96 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Vale do São Francisco. Rio de Janeiro.

RODRIGUES, Luciana Avila; NEVES, Regina Silva Pina. O Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de Brasília: estratégia metodológica em estudo. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 97–111, 2019.

ROSA, Éllen Caroline Costa Santa; DA SILVA, Daniel Leite Mesquita; BARROS, André Vinícius Mendes; DO AMARAL, Tatiane Reis; LEITE, Neila Marcelle Gualberto. O panorama das atividades não presenciais relativas ao Pré-Cálculo e Cálculo I no IFNMG - Campus Montes Claros. *Revista Foco*, [S. l.], v. 16, n. 8, p. e2824, 2023.

SILVA, Rodrigo Tavares da. *Atividades para o estudo de integrais em um ambiente de ensino híbrido*. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade

Tecnológica Federal do Paraná. Londrina.

STEWART, James. *Cálculo: volume 2*. Tradução: EZ2 Translate. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THIEGHI, Leila Thomazelli. Utilização do aplicativo “Waze” no cálculo de distância através da integral definida. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 43, p. e20210020, 2021.

O papel dos registros de representação na Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas

The Role of Representational Registers in Multiple-Integral Coordinate Change

Resumo: O artigo é orientado pelo objetivo de *analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas*. Para tanto, foi elaborada e implementada uma sequência de tarefas para oito acadêmicos do 5º ao 8º período da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros. Os estudantes apresentaram progresso no tratamento dentro dos registros, especialmente ao utilizar o GeoGebra para representar graficamente regiões e sólidos no espaço tridimensional. No entanto, dificuldades persistiram na conversão entre registros, especialmente ao alternar do registro gráfico para o algébrico. Essa dificuldade foi mais evidente em tarefas que visam à formulação de integrais triplas, nas quais os participantes apresentaram inconsistências nos limites de integração.

Palavras-chave: Cálculo Integral. Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. Registro de Representação Semiótica.

Abstract: The article aims to analyze the knowledge mobilized by students when solving a sequence of tasks that uses different representation registers on Change of Coordinates in Multiple Integrals. To this end, a sequence of tasks was designed and implemented for eight students from the 5th to 8th period of the Mathematics Degree at the State University of Montes Claros. The students showed progress in the treatment within the registers, especially when using GeoGebra to graphically represent regions and solids in three-dimensional space. However, difficulties persisted in the conversion between registers, especially when switching from the graphic to the algebraic register. This difficulty was more evident in tasks aimed at the formulation of triple integrals, in which the participants presented inconsistencies in the integration limits.

Keywords: Integral Calculus. Change of Coordinates in Multiple Integrals. Record of Semiotic Representation.

3.1 Introdução

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente no contexto das Integrais Múltiplas e Mudanças de Coordenadas, apresenta desafios que vão além do emprego de regras matemáticas. Dentre esses desafios, destaca-se a necessidade de compreender conceitos



que exigem visualização espacial e a capacidade de alternar entre diferentes formas de representação, especialmente em contextos tridimensionais, como gráficos, expressões algébricas e descrições geométricas. Esses processos são fundamentais para a aprendizagem de transformações como a Mudança de Coordenadas em contextos tridimensionais, que incluem sistemas cilíndricos e esféricos.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval (2003, 2009, 2011, 2012), oferece um referencial teórico importante para analisar essas dificuldades no ensino de Matemática. De acordo com essa teoria, a compreensão de conceitos matemáticos exige que os estudantes não apenas manipulem representações dentro de um mesmo registro, mas também realizem conversões entre diferentes registros de forma articulada. No caso das Mudanças de Coordenadas, isso significa interpretar e conectar representações gráficas das regiões de integração com suas correspondentes formulações algébricas. Contudo, como apontam Cometti (2018) e Ragoni (2021), essa transição entre registros não é um processo espontâneo, sendo frequentemente identificada como uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Nesse contexto, o uso de tecnologias digitais, como o GeoGebra, tem sido amplamente reconhecido por sua capacidade de facilitar a visualização e a manipulação de objetos matemáticos. Estudos como os de Pavanelo e Lima (2017), Thieghi (2021), Almeida (2021), Mota (2021) indicam que o GeoGebra permite aos estudantes interagirem de forma dinâmica com representações algébricas e geométricas, auxiliando na superação de barreiras cognitivas e promovendo a integração entre registros de representação. Essa abordagem não apenas torna o aprendizado mais acessível, mas também, potencializa a compreensão dos conceitos relacionados às Mudanças de Coordenadas e Integrais Múltiplas. Ao integrar aspectos algébricos e geométricos, ferramentas como o GeoGebra permitem visualizar figuras em duas e três dimensões, destacando como essas representações geométricas são alteradas em tempo real à medida que suas representações algébricas são modificadas.

O estudo apresentado neste artigo tem como objetivo *analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação, sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas*. Nesta seção apresentaremos a justificativa do estudo, trazendo elementos relativos ao ensino do Cálculo com o auxílio de tecnologias digitais.

O estudo aqui apresentado faz parte de uma pesquisa mais ampla em que foram levantadas dificuldades relativas à aprendizagem de Integrais Múltiplas, com uma revisão de literatura. Em seguida, foi implementada uma atividade diagnóstica com o objetivo de *analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação, sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.*

Os resultados do teste diagnóstico revelaram que as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao trabalhar com Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas estão, em grande parte, associadas à conversão entre diferentes registros de representação semiótica. Embora alguns tenham evidenciado habilidade inicial em interpretar representações gráficas, muitos enfrentaram problemas significativos ao converter essas representações em expressões algébricas, evidenciando fragilidades na coordenação entre os registros. Além disso, a visualização tridimensional e a interpretação de regiões geométricas complexas apresentaram desafios consideráveis, comprometendo a compreensão e o desenvolvimento de cálculos de integrais em contextos que exigem maior abstração. Esses achados reforçam a necessidade de estratégias pedagógicas que integrem múltiplos registros e promovam práticas que articulem visualizações geométricas e operações algébricas. Nesse contexto, ferramentas digitais como o GeoGebra se apresentam como aliados importantes para superar esses problemas, facilitando a construção de significados e permitindo uma abordagem mais integrada e dinâmica para a aprendizagem de conceitos relacionados às Integrais Múltiplas.

A proposta do estudo foi desenvolvida com base nas dificuldades e limitações identificadas com a revisão de literatura e no texto diagnóstico já realizados. A sequência de tarefas foi implementada com a colaboração de oito acadêmicos matriculados entre o 5º e 8º períodos de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros.

Destacamos que o estudo passou pela análise e aprovação do Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da Universidade, tendo sido considerado aprovado, conforme parecer consubstanciado sob a indicação nº 6.238.670, de 14 de agosto de 2023, e com Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) nº 72823723.5.0000.5146, por respeitar os preceitos éticos da pesquisa envolvendo seres humanos.



Além da Introdução, que apresenta o tema e contextualiza o leitor quanto ao objetivo do estudo, organizamos este artigo em seções: Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas, em que se explora os principais aspectos da Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas, destacando as transformações mais comuns e os desafios conceituais associados a sua aplicação no ensino e na aprendizagem; Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Educação Matemática; Metodologia e Análise. Ao final, são apresentadas as considerações finais.

3.2 Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas

A Mudança de Coordenadas é uma importante ferramenta no estudo de Integrais Múltiplas, especialmente ao lidar com problemas complexos que demandam simplificação para facilitar o processo de integração⁷. Esse recurso permite reinterpretar a região de integração e as funções envolvidas em um novo sistema de coordenadas, mais adequado à geometria do problema.

Na mudança de variável em Integrais de uma variável, introduz-se uma nova variável com o objetivo de simplificar o processo de integração, facilitando a avaliação de integrais mais complexas. Esse procedimento requer a substituição da variável e a adaptação do diferencial correspondente. Entretanto, ao se tratar de Integrais Múltiplas, a mudança de variáveis apresenta um nível de complexidade superior devido ao fato de estar em duas ou três dimensões. Nessa situação, é fundamental considerar o uso do jacobiano da transformação, o qual permite ajustar corretamente o diferencial no novo sistema de coordenadas. Além disso, a escolha das novas variáveis deve assegurar a preservação das relações geométricas do problema, demandando, assim, melhor compreensão da geometria que envolve o cálculo das integrais.

As mudanças de coordenadas sejam elas polares, cilíndricas ou esféricas, evidenciam a complexidade envolvida no processo de transição entre diferentes sistemas de referência. Essas transformações exigem não apenas o domínio das fórmulas e cálculos associados, mas também, uma compreensão geométrica das relações envolvidas e a capacidade de articular representações algébricas, gráficas e geométricas de maneira integrada.

No sistema em Coordenadas Polares, segundo Stewart (2013), um ponto P com

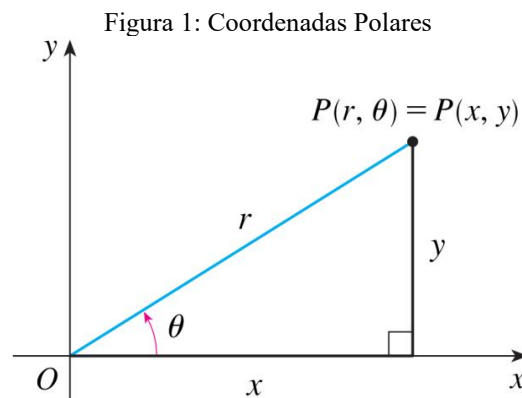
⁷ O processo de integração refere-se a um conjunto de técnicas matemáticas utilizadas para calcular a integral de uma função.

coordenadas retangulares (x, y) tem por coordenadas polares (r, θ) , onde r é a distância do ponto P à origem e θ é o ângulo formado pela semirreta positiva das abscissas e o segmento de reta que liga a origem ao ponto P.

Ainda, segundo Stewart (2013), esta Mudança de Coordenadas é dada por

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$$

onde $r \geq 0$ e θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$, onde θ_0 é um ângulo fixado.



Fonte: Stewart (2013, p. 895)

O jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Então, segundo Stewart (2013), se f é uma função contínua no retângulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, então

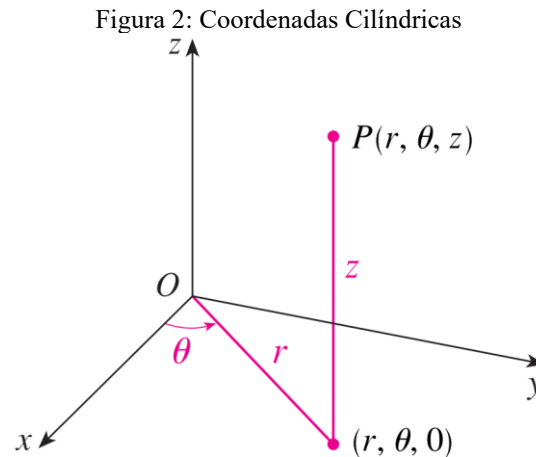
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta.$$

Quanto às Coordenadas Cilíndricas, segundo Stewart (2013), um ponto P de coordenadas (x, y, z) tem coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy .

Ainda, segundo Stewart (2013), essa Mudança de Coordenadas é dada por

$$g(x, y, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$$

onde $r \geq 0$, θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ e z no intervalo $-\infty < z < +\infty$.



Fonte: Stewart (2013, p. 923)

O jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = r.$$

Então, segundo Stewart (2013), se f é uma função contínua no sólido E , com

$$E = \{(x, y, z); (x, y) \in R, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}, \text{ então}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{u_1(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b (r\cos\theta, r\text{sen}\theta, z) r dr d\theta dz.$$

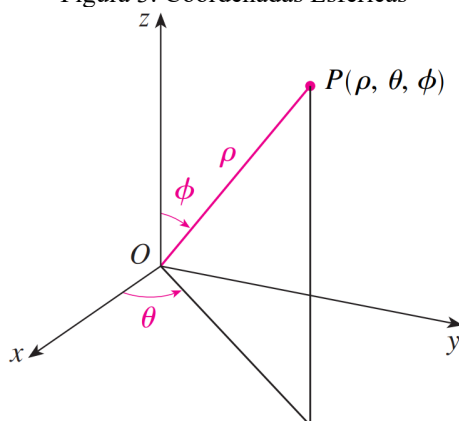
Já para as Coordenadas Esféricas, conforme Stewart (2013), um ponto P de coordenadas retangulares (x, y, z) tem por coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) , onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelos valores positivos da abcissa e o segmento de reta que liga $(0,0)$ a (x, y) , e ϕ é o ângulo formado pela semirreta positiva da cota e o segmento de reta que liga P à origem.

Ainda segundo Stewart (2013) esta Mudança de Coordenadas é dada por

$$g(x, y, z) = (\rho \text{sen}\phi \cos\theta, \rho \text{sen}\phi \text{sen}\theta, \rho \cos\phi)$$

onde $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$.

Figura 3: Coordenadas Esféricas



Fonte: Stewart (2013, p. 927)

Neste caso, o jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\phi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta & \rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho \operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi.$$

Logo, se f é contínua em Q

$$\begin{aligned} \iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\phi) \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\theta d\phi \end{aligned}$$

onde Q é uma cunha esférica dada por $Q = \{(\rho, \theta, \phi); a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$.

A próxima seção discute as contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) para compreender e abordar as dificuldades enfrentadas nesse processo.

3.3 Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Educação Matemática

O estudo baseia-se fundamentalmente na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003, 2009, 2011, 2012). O autor argumenta que a formação de conceitos matemáticos complexos, como aqueles envolvidos na Mudança de Coordenadas e no Cálculo Integral é facilitada usando-se dois ou mais registros de representação.

Duval (2003) argumenta que realizar pelo menos uma operação cognitiva fundamental

de conversão é uma condição necessária para que ocorra a aprendizagem em Matemática. No entanto, isso não é suficiente para que um estudante aprenda um conteúdo, segundo esse pesquisador. O estudante precisa absorver as três atividades cognitivas fundamentais, presentes em um sistema semiótico, quais sejam: operações de formação de uma representação que identifica o objeto matemático; operações de tratamento inerentes a registros de um mesmo sistema semiótico; e operações de conversão efetuadas quando lidamos com registros de sistemas semióticos diferentes (Duval, 2009). A compreensão exige que os estudantes saibam interpretar, manipular e alternar diferentes formas de representação semiótica.

Duval (2003) busca explicar os processos cognitivos que favorecem a compreensão da Matemática em contextos de ensino. Segundo o autor, há grandes desafios na compreensão dos objetos matemáticos, muitas vezes acompanhados de incongruências, especialmente quando se trata de representá-los. Esses objetos não são, em sua maioria, diretamente observáveis ou concretos. Assim, as representações tornam-se um meio essencial para acessá-los e compreendê-los.

Duval (2009, p. 17) destaca a lei fundamental que rege o funcionamento cognitivo do pensamento: “Não há *noésis* (aquisição conceitual de um objeto) sem *semiósis* (apreensão ou produção de uma representação semiótica)”. Essa afirmação evidencia a importância dos sistemas semióticos como meios para a construção de conceitos matemáticos.

Segundo Duval (2011), os signos e as representações têm a função de trazer à tona o que está ausente ou de transmitir um pensamento que não é evidente para todos. No campo da Matemática, há uma ampla diversidade de representações semióticas disponíveis, como a língua natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras. Essas representações desempenham um papel fundamental para facilitar a compreensão dos conteúdos matemáticos.

De acordo com Duval (2009), a aquisição conceitual, envolvendo a mobilização e a articulação dos registros de representação, exigem a compreensão de duas atividades cognitivas fundamentais: o tratamento e a conversão.

No que se refere ao tratamento, pode-se entender essa atividade cognitiva como o processo de transformar uma representação semiótica em outra, mantendo-se dentro do registro de representação. Segundo Duval (2009, p. 57), “um tratamento é uma transformação

de representação interna a um registro de representação ou a um sistema”. No Quadro 1, apresentamos um exemplo dessa atividade cognitiva.

Quadro 1: Exemplo de tratamento

Determine a intersecção entre o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 4$.
Solução:
$\sqrt{x^2 + y^2} = 4$
$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 4^2$
$x^2 + y^2 = 4^2$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Observe que a solução é expressa no registro algébrico, em que são realizadas transformações internas dentro desse mesmo registro. Inicia-se no registro algébrico e chega-se ao resultado sem transitar por outros registros de representação.

Duval (2009, p. 57) destaca um exemplo prático da atividade de tratamento: “A paráfrase é uma transformação interna ao registro do discurso da língua natural: ela ‘reformula’ um enunciado dado em outro seja para substituí-lo seja para explicá-lo”. Ou seja, mesmo dentro do registro de representação em língua natural, podemos perceber exemplos de tratamento.

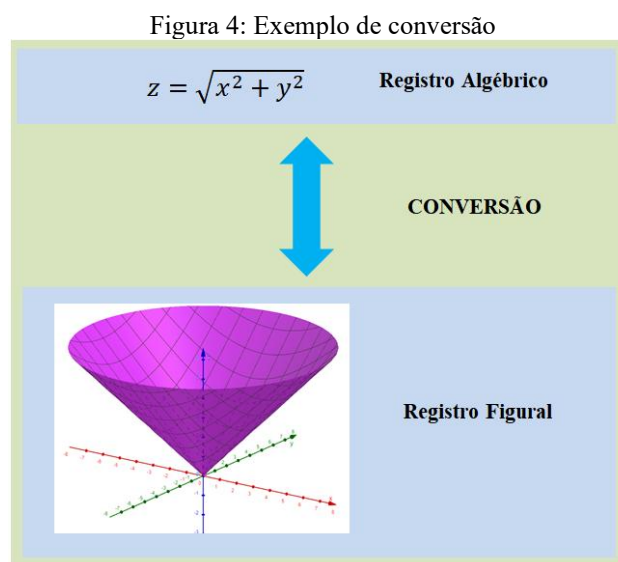
Duval (2012), destaca que cada registro de representação possui regras específicas de tratamento, que variam em natureza e quantidade de acordo com o registro. Ele aponta que essas regras incluem, por exemplo, derivação, coerência temática, associações por contiguidade e similitude. No caso do registro da língua natural, há muitas regras externas para a conformidade, mas relativamente poucas regras de tratamento externas para a expansão discursiva de um enunciado completo.

A conversão se refere à transformação de registros de representações diferentes de um mesmo objeto. Duval (2009, p. 59) define conversão como sendo “uma transformação externa ao registro de representação de partida”.

A conversão ocorre de maneira autônoma e distinta do tratamento. É essencial observar essa diferença nos processos de ensino e aprendizagem de diversos conceitos matemáticos. Duval (2009, p. 59-60) oferece um exemplo que nos permite refletir sobre os momentos e as formas em que essa dinâmica se manifesta com o cálculo numérico:

Por mais que eles saibam efetuar a adição de dois números com sua escritura decimal e com sua escritura fracionária, certos alunos não se preocupam de forma alguma em pensar em converter a escritura decimal de um número em sua escritura fracionária (e reciprocamente), ou mesmo fracassam quando se asseguram que isto é necessário no desenvolvimento de um cálculo. Na realidade, a escritura decimal, a escritura fracionária e a escritura com exposição constituem três registros diferentes de representação de números.

A seguir apresentamos um exemplo da atividade cognitiva de conversão:



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

No exemplo (Figura 4), podemos perceber a transição da expressão algébrica, que representa o cone, para a representação gráfica, ou figural, do mesmo objeto e vice-versa. Ou seja, há a alternância de dois tipos de representação, caracterizando a atividade cognitiva de conversão.

A teoria sugere que a conversão entre esses registros não é uma habilidade automática para os estudantes, exigindo, portanto, práticas didáticas intencionais que promovam esse tipo de transição. Uma dificuldade frequente entre os estudantes é a incapacidade de perceber as conexões entre os registros, o que limita a sua capacidade de resolver problemas e interpretar conceitos.

No caso específico das Mudanças de Coordenadas (polares, cilíndricas e esféricas) no Cálculo Integral, a necessidade de múltiplos registros de representação torna-se ainda mais evidente. Os estudantes não apenas precisam entender as representações simbólicas dos elementos envolvidos (as funções e os limites de integração), mas também, visualizar e manipular geometricamente as regiões no plano ou no espaço tridimensional. O uso de ferramentas digitais, como o aplicativo GeoGebra, pode potencializar esse processo ao permitir que os estudantes manipulem visualmente objetos matemáticos, facilitando a conversão entre diferentes registros. Segundo Duval (2009), a interação com essas representações visuais pode acelerar a compreensão e melhorar a retenção de conceitos, desde que seja devidamente orientada e estruturada.

Na seção seguinte, será apresentada uma estrutura metodológica do estudo, que incorpora elementos da Engenharia Didática.

3.4 Metodologia

O estudo é de natureza qualitativa, com uma abordagem descritiva e exploratória. Seu objetivo central é analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas. As tarefas são resolvidas com o apoio do GeoGebra, que potencializa a visualização. O estudo busca discutir como os estudantes alternam os registros de representação, evidenciando as estratégias empregadas e as dificuldades enfrentadas durante o processo de resolução.

A metodologia utilizada ampara-se em pressupostos da Engenharia Didática. Conforme descrito por Artigue (1996), a Engenharia Didática surgiu no âmbito da Didática da Matemática, sob influência francesa, no início dos anos de 1980. Essa metodologia foi idealizada para promover uma abordagem particular ao ensino. Caracteriza-se pela atenção na estruturação dos procedimentos metodológicos da pesquisa, envolvendo etapas que vão desde a fundamentação teórica até a experimentação. Um dos aspectos dessa metodologia é sua capacidade de articular o componente teórico da pesquisa com a aplicação na educação, evidenciando suas especificidades.



De acordo com Artigue (1996), a Engenharia Didática é estruturada em quatro fases que, não necessariamente, ocorrem de forma linear. Muitas vezes, é necessário integrar e até sobrepor essas etapas para otimizar o processo. Em uma primeira fase, de análises prévias, procura-se compreender o contexto educacional, identificando barreiras que dificultam a aprendizagem. A partir dessa análise, na concepção e análise *a priori*, são planejadas tarefas que levam em conta possíveis dificuldades dos estudantes. A fase de experimentação consiste na implementação dessas tarefas, ajustando-se com base nas interações observadas. Por fim, a análise *a posteriori* compara os resultados obtidos com a visão inicial, possibilitando reflexões sobre o processo.

Nos artigos anteriores, foram desenvolvidas e detalhadas as duas primeiras fases da Engenharia Didática. No primeiro artigo, compreendendo a fase de análises prévias, foi conduzida uma revisão sistemática da literatura para identificar e compreender as principais dificuldades enfrentadas por professores e estudantes no ensino e aprendizagem de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas. No segundo artigo, que abordou a fase de concepção e análise *a priori*, foi desenvolvida e implementada uma atividade diagnóstica com base nos achados do primeiro artigo. Essa atividade teve como objetivo identificar, na prática, as dificuldades manifestadas pelos estudantes e validar as hipóteses levantadas na revisão de literatura, possibilitando o plano de estratégias pedagógicas fundamentadas na TRRS para abordar tais desafios.

Este artigo abrange as últimas duas fases da Engenharia Didática — experimentação e análise *a posteriori*. De acordo com Artigue (1996), a etapa de experimentação destaca-se pela importância de acompanhar e documentar a forma como os estudantes lidam com as tarefas propostas, ajustando o dispositivo didático sempre que necessário. Nessa fase, os estudantes enfrentam situações-problema que exigem a utilização de conceitos matemáticos, enquanto o pesquisador coleta dados com observações, registros escritos e outras técnicas de coleta. Pais (2001) enfatiza a importância de registrar o máximo de informações relevantes que possam contribuir para a compreensão das competências investigadas. Além disso, destaca-se a necessidade de garantir que as situações reais observadas durante a experiência sejam realizadas com clareza no relatório final da pesquisa, respeitando o princípio de precisão e fidelidade ao contexto.

Após a etapa de experimentação, procede-se a análise *a posteriori* e validação, na qual

os dados obtidos são meticulosamente avaliados e confrontados com as diferenças formuladas durante uma análise *a priori*. Segundo Artigue (1996), essa fase é crucial para confirmar ou questionar as hipóteses iniciais, além de identificar aspectos bem-sucedidos e pontos que necessitam de ajustes. Uma análise *a posteriori* permite compreender como as tarefas propostas impactaram o aprendizado dos estudantes, oferecendo subsídios valiosos para as aulas planejadas futuramente. Esse processo de validação é fundamental para garantir que as instruções e recomendações estejam ancoradas em evidências concretas e representem fielmente as observações feitas na experimentação.

Pais (2001) ressalta que a fase de validação exige atenção metodológica redobrada, pois é nessa etapa que se verifica a consistência científica do trabalho. Nesse sentido, a Engenharia Didática, como abordagem metodológica, apoia-se em registros de estudos de caso, cuja validade é restrita ao contexto específico da pesquisa, garantindo a coerência interna dos resultados obtidos.

Com base nesses pressupostos e com o objetivo de atender às necessidades específicas do nosso contexto, adaptamos as fases de implementação e avaliação.

- *Implementação*: realização da sequência de tarefas, observações das interações entre os estudantes, entre o professor e os estudantes e entre os estudantes e os recursos didáticos, além da execução de um teste final;
- *Avaliação*: realizada mediante comparação entre o teste diagnóstico e o teste final e a análise das respostas da sequência de tarefas, além disso devem ser observados os comportamentos dos estudantes durante a fase de implementação.

Neste artigo, discutimos os resultados obtidos com a implementação da sequência de tarefas elaborada a partir da análise dos dados produzidos em um teste diagnóstico desenvolvido e implementado nas etapas anteriores da pesquisa, bem como da análise das respostas coletadas no Questionário Final aplicado após a realização da sequência de tarefas.

Os participantes do estudo são estudantes do 5º ao 8º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, envolvidos em atividades inerentes ao projeto de ensino do Laboratório de Educação Matemática (Labemat). Essa

escolha se deu pelo fato de esses estudantes já terem cursado, no 4º período, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, na qual são abordados, conforme a ementa⁸ do curso, os tópicos de Integração Dupla, Integração Tripla e Mudança de Coordenadas.

As tarefas foram propostas no laboratório de informática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Unimontes, onde os estudantes trabalharam individualmente com o auxílio do GeoGebra. A implementação ocorreu nos dias 8, 11, 12, 13 e 14 de novembro de 2024, com encontros de 2 horas diárias. Cada estudante participou de três encontros, totalizando 6 horas de atividades por estudante.

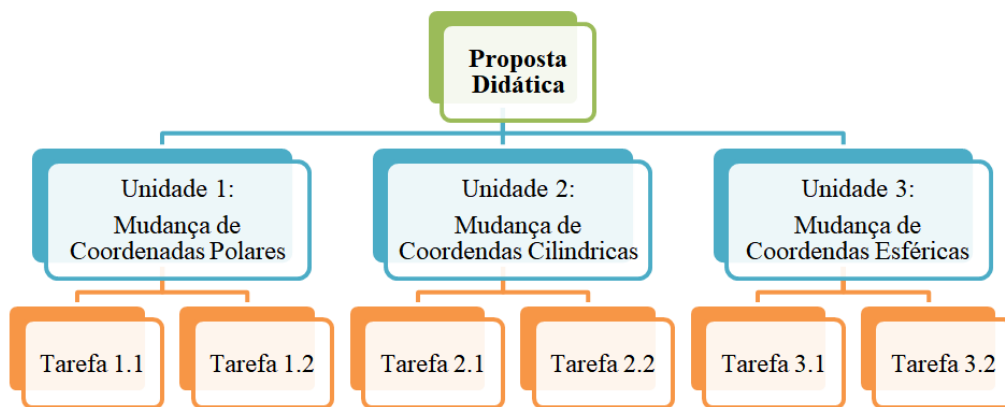
O aplicativo GeoGebra foi empregado com o recurso de gravação, capturando as interações dos estudantes com o *software*. Paralelamente, as falas dos participantes foram registradas por meio de gravações de áudio, complementadas por anotações no diário de campo, que mostram observações relevantes sobre o comportamento e as dificuldades enfrentadas pelos estudantes durante as atividades. Cada arquivo produzido no GeoGebra foi armazenado para análise posterior, e os estudantes também registraram suas respostas e observações em um editor de texto, ampliando o conjunto de dados disponíveis para a fase de análise.

Participaram desta etapa da investigação oito estudantes que aceitaram o convite para colaborar com a pesquisa. Ressaltamos que, o estudo contou, inicialmente, com doze participantes. Destes, quatro concluíram suas o curso de Licenciatura em Matemática antes da realização desta fase do estudo. Dessa forma, a continuidade do estudo foi realizada com os oito estudantes que ainda estavam matriculados e puderam contribuir. Todos foram previamente orientados sobre os objetivos do estudo e informados de que suas identidades seriam preservadas, em conformidade com os princípios éticos que regem pesquisas envolvendo seres humanos.

A proposta didática implementada durante a etapa de experimentação da pesquisa é composta por uma sequência de tarefas organizadas em três unidades temáticas: Coordenadas Polares, Coordenadas Cilíndricas e Coordenadas Esféricas, conforme explicitada na Figura 5.

Figura 5: Organização da Proposta Didática

⁸ Ementa: Integração dupla. Integração tripla. Mudança de coordenadas. Integrais de linha. Diferenciais exatas e independência de caminhos. Análise vetorial: teoremas de Green Gauss e Stokes. Disponível em https://unimontes.br/wp-content/uploads/2019/11/resolucao_cepex150.pdf; consultado em 12 mar. 2024.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Cada unidade aborda a escrita de integrais e a delimitação de regiões de integração, explorando conceitos matemáticos por meio de representações algébricas, gráficas e geométricas com o apoio do GeoGebra. As tarefas foram desenvolvidas a partir das dificuldades identificadas no teste diagnóstico, com o objetivo de fortalecer a alternância entre registros de representação semiótica e promover o entendimento dos limites de integração em contextos bidimensionais e tridimensionais.

A seguir, no Quadro 2, detalhamos as tarefas propostas, destacando os objetivos e justificativas didáticas de cada uma, com base nas respostas e dificuldades apresentadas pelos estudantes nas etapas anteriores da pesquisa.

Quadro 2: Proposta Didática

Unidade	Tarefa	Objetivo	Justificativa com Base na Análise do Teste Diagnóstico Aplicado aos Estudantes
1. Mudança de Coordenadas Polares	1.1 Construindo Integrais Duplas em Coordenadas Polares	Explorar uma região R descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral dupla que representa a medida da área desta região usando coordenadas polares	Os estudantes mostraram dificuldades em traduzir regiões descritas em coordenadas cartesianas para polares, apesar de conseguirem identificar visualmente a região de integração no plano. No cálculo de uma integral sobre uma região delimitada por circunferências, oito dos doze estudantes conseguiram identificar a região, mas a maioria teve dificuldade na mudança para coordenadas polares. Esta tarefa foi desenhada para fornecer suporte visual por meio do GeoGebra,

			permitindo a exploração da relação entre os parâmetros (r e θ) e reforço na conversão entre registros gráficos e algébricos, de forma a incentivar a escrita da integral correspondente.
	1.2 Construindo Regiões de Integração a partir de Integrais Duplas	Explorar a construção de regiões de integração por meio de integrais duplas em coordenadas polares.	Ao trabalhar com coordenadas polares, os estudantes tiveram dificuldade em determinar corretamente os limites de integração, o que impactou diretamente a escrita correta da integral. Ao construir regiões de integração com o auxílio do GeoGebra, os estudantes poderão visualizar interativamente os limites de r e θ , o que poderá facilitar a identificação e a compreensão desses limites. Essa prática é importante para superar a dificuldade observada na tarefa diagnóstica, em que parte dos estudantes falharam em identificar corretamente os limites, mesmo após reconhecerem a região de integração.
2. Mudança de Coordenadas Cilíndricas	2.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas	Explorar uma região R , descrita em coordenadas cartesianas, analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral tripla que representa a medida de volume desta região usando coordenadas cilíndricas.	Muitos estudantes tiveram dificuldade em visualizar e manipular sólidos tridimensionais. No problema envolvendo a região limitada por planos e um cilindro, apenas três dos doze participantes conseguiram formular a integral tripla. A tarefa proposta se baseia nessa dificuldade, incentivando o uso da visualização 3D no GeoGebra para auxiliar os estudantes a identificarem os limites de r , θ e z , e a relacionar as superfícies que limitam o sólido, fortalecendo a conversão entre os registros gráficos e algébricos.
	2.2 Construindo Regiões de Integração com Coordenadas Cilíndricas	Explorar a construção de regiões de integração por meio de integrais triplas em coordenadas cilíndricas.	Parte dos estudantes não conseguiu identificar corretamente os limites de integração na construção de integrais triplas com coordenadas cilíndricas. Esta tarefa visa reforçar a prática da identificação de limites e a construção de regiões de integração com coordenadas cilíndricas, permitindo que os estudantes visualizem as regiões tridimensionais e consolidem o entendimento sobre como os limites são determinados.
3. Mudança de Coordenadas	3.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas	Explorar uma região S descrita em coordenadas	A questão que envolvia o cálculo da medida de volume delimitado por uma esfera e um cone foi a que apresentou

Esféricas	Esféricas	cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral tripla que representa a medida de volume desta região usando coordenadas esféricas.	maiores dificuldades para os estudantes, (apenas um estudante conseguiu elaborar uma solução). Ao explorar a mudança para coordenadas esféricas com o auxílio do GeoGebra, esta tarefa visa proporcionar uma experiência interativa na visualização de sólidos delimitados por essas superfícies, permitindo uma melhor compreensão da relação entre os parâmetros ρ , θ e ϕ , e facilitando a construção da integral tripla correspondente.
	3.2 Construindo Regiões de Integração com Coordenadas Esféricas	Explorar a construção de regiões de integração por meio de integrais triplas em coordenadas esféricas.	A dificuldade observada em relação à construção de integrais triplas em coordenadas esféricas justifica a inclusão de mais uma tarefa focada nessa habilidade. Ao permitir que os estudantes explorem os limites de integração diretamente no GeoGebra e construam a integral tripla passo a passo, esta tarefa busca desenvolver a capacidade de conversão entre os registros algébricos e gráficos, promovendo o fortalecimento da conversão entre registros semióticos.

Fonte: Elaboração do autor (2024)

Na seção seguinte, discutimos as respostas da sequência de tarefas e do questionário final aplicado aos estudantes.

3.5 Análise

A Tarefa 1.1 propunha que os estudantes explorassem uma região R , descrita em coordenadas cartesianas e a representassem graficamente com a ajuda do GeoGebra. A partir dessa visualização, deveriam converter as informações para o sistema de coordenadas polares, identificando os limites de r e θ e formular a integral dupla correspondente.

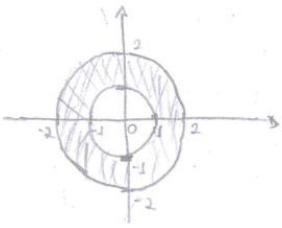
Os resultados mostraram que seis dos oito estudantes conseguiram realizar o tratamento inicial no registro algébrico, identificando corretamente. Esse tratamento foi essencial para que pudessem compreender as características geométricas da região. No entanto, dois estudantes apresentaram dificuldades nesse aspecto, com interpretações

equivocadas, como confundir que a região era delimitada por intervalos específicos de ângulos, o que indicou limitações na compreensão do significado geométrico da equação.

Na conversão para o registro gráfico, os estudantes mostraram sucesso ao utilizar o GeoGebra para representar a região R . Seis deles conseguiram visualizar corretamente e destacar a região correspondente. Esse sucesso reflete uma habilidade em traduzir informações algébricas para representações geométricas, evidenciando um domínio dessa conversão. Contudo, dois estudantes apresentaram dificuldades significativas, limitando-se a representar o contorno do círculo ou negligenciando a visualização completa da área delimitada. Esses erros sugerem que, embora a ferramenta digital tenha ajudado na visualização, alguns estudantes não conseguiram interpretar completamente a relação entre a equação algébrica e a região geométrica.

A etapa seguinte, de tratamento no registro gráfico, envolvia a determinação dos limites de integração com base na visualização gerada. Quatro estudantes identificaram corretamente os limites. Eles evidenciaram competência em analisar a região descrita em coordenadas polares e reconhecer a variação apropriada para os parâmetros, o que indica um bom entendimento das propriedades geométricas da região, dentre eles destacamos os registros do estudante A1.

Figura 6: Registro do estudante A1

<p>1.1 Construindo Integrais Duplas em Coordenadas Polares a partir de regiões do \mathbb{R}^2.</p> <p>Objetivo: Explorar uma região R descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral dupla que representa a medida da área desta região usando coordenadas polares.</p> <p>Abra o GeoGebra.</p> <p>a) No GeoGebra plote a região R definida por $R = \{(x,y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. > Digite na linha de entrada $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.</p> <p>b) Agora, faça um esboço dessa região no espaço abaixo.</p> 	<p>c) Reescreva a equação que define a região R utilizando coordenadas polares.</p> <p>Para tanto, inicialmente vamos explorar o <i>applet</i> disponível no link https://www.geogebra.org/m/tuvha437x.</p> <p>Fazendo a variação, através dos controles deslizantes, do raio r e do ângulo θ da superfície representada, reflita sobre os limites inferiores e superiores desses parâmetros. Anote suas impressões.</p> $R = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); 1 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ <p>c.1 Em relação a região R, determine os limites inferiores e superiores de r e θ.</p> $1 \leq r \leq 2$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ <p>c.2 Escreva a integral dupla que calcula a área da região R.</p> $\int_0^{2\pi} \int_1^2 r \, dr \, d\theta$
--	--

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Finalmente, a etapa de conversão do registro gráfico para o algébrico, em que os estudantes deveriam expressar a integral dupla correspondente em coordenadas polares, revelou-se a mais desafiadora. Apenas quatro estudantes conseguiram formular corretamente

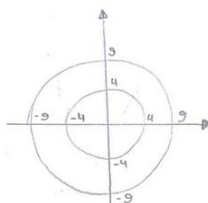
a solução, mostrando uma coordenação satisfatória entre os registros gráficos e algébricos.

Os outros quatro estudantes apresentaram erros recorrentes, como omitir o fator r , corresponde ao jacobiano, na integral, atribuir limites inconsistentes ou formular uma integral incompleta. Esses resultados indicam dificuldades significativas na articulação entre os registros e no entendimento do papel do jacobiano na mudança de variáveis, refletindo a complexidade da conversão gráfica para algébrica, conforme apontado por Duval (2009).

A Tarefa 1.2 desafiava os estudantes a interpretar uma integral dupla em coordenadas polares, identificar a região de integração correspondente e reconstruir essa representação no registro gráfico auxiliados pelo GeoGebra. Além disso, a tarefa exigia que os estudantes estabelecessem a correspondência entre a formulação algébrica e geométrica da região no plano polar. De acordo com Duval (2009), a conversão entre registros semióticos é uma das atividades cognitivas mais complexas no aprendizado matemático, especialmente quando envolve a alternância entre representações algébricas e gráficas. Essa tarefa exige tanto tratamentos nos registros gráficos e algébricos quanto conversões entre esses registros, ressaltando a importância da articulação entre diferentes formas de representação.

Os resultados mostram que, dentre os oito estudantes, um conseguiu interpretar corretamente os limites da integral dupla e identificar a região de integração no plano polar. Esse estudante mostrou habilidade no tratamento dentro do registro algébrico, como podemos observar na Figura 7.

Figura 7: Registro do estudante A4

<p>1.2 Construindo regiões de integração a partir de Integrais Duplas em Coordenadas Polares.</p> <p>Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração através de integrais duplas em coordenadas polares.</p> <p>Dada a integral dupla abaixo:</p> $\int_0^{2\pi} \int_4^9 r dr d\theta$ <p>Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S, com o auxílio do GeoGebra.</p> <p>a) Quais os limites inferiores e superiores de r e θ?</p> <p>$4 \leq r \leq 9$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$</p>	<p>b) Determine a(s) expressão(ões) que define(m) a região S.</p> $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$ $16 \leq x^2 + y^2 \leq 81$ <p>c) Com o auxílio do GeoGebra faça o esboço do sólido S.</p> 
--	---

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

No entanto, sete estudantes apresentaram dificuldades significativas, tanto no

tratamento quanto na conversão. Três deles interpretaram erroneamente os limites de θ , o que levou à representação incorreta de um círculo completo no plano polar. Outros dois estudantes não conseguiram correlacionar os limites fornecidos com a geometria da região, resultando em representações incompletas ou inconsistentes no registro gráfico. Esses erros reforçam o que foi apontado por Cometti (2018), que destaca as dificuldades frequentes dos estudantes em compreender as relações geométricas implícitas nas Integrais Múltiplas, especialmente quando há mudanças de coordenadas envolvidas.

A conversão, do registro algébrico para o gráfico, foi particularmente desafiadora para a maioria dos estudantes. Segundo Duval (2009), essa conversão exige que o estudante não apenas compreenda a relação entre os limites de integração e a geometria da região, mas também consiga mobilizar esse conhecimento para construir uma representação visual precisa. Nesse sentido, os registros dos estudantes indicam uma lacuna na fluência necessária para realizar essa transição com confiança.

Na solução do estudante, que concluiu a tarefa, destacam-se aspectos importantes do tratamento no registro gráfico — esse estudante foi capaz de utilizar o GeoGebra para construir representações detalhadas da região de integração, verificando a correspondência com os limites fornecidos na integral. Esse sucesso mostra que a combinação de ferramentas tecnológicas com práticas bem estruturadas pode facilitar a coordenação entre registros, como defendido por Thieghi (2021) e Almeida (2021), que enfatizam o papel do GeoGebra na promoção de visualizações dinâmicas que auxiliam na compreensão de conceitos matemáticos complexos.

Por outro lado, os erros observados nos registros dos demais estudantes destacam a necessidade de práticas pedagógicas que reforcem tanto o tratamento quanto a conversão entre registros. Silva (2019) e Rocha (2019) apontam que a falta de coordenação entre registros é um dos maiores entraves no ensino de Integrais Múltiplas e defendem a integração de tarefas que articulem explicitamente aspectos geométricos e algébricos. No caso dessa tarefa, os erros sugerem que os estudantes precisariam de maior suporte para interpretar os limites de integração e traduzi-los em representações gráficas adequadas.

A Tarefa 2.1 exigia que os estudantes analisassem uma região tridimensional definida por superfícies geométricas no espaço cartesiano e, a partir dessa análise, formulassem a integral tripla correspondente em coordenadas cilíndricas. Eles precisavam identificar as

superfícies que delimitavam o sólido e construir a integral no registro algébrico. Essa tarefa envolveu tanto o tratamento dentro de registros quanto a conversão entre registros de representação semiótica.

Os resultados indicaram que, entre os oito estudantes, apenas três conseguiram determinar corretamente os limites e formular a integral completa. Esses estudantes mostraram habilidade no tratamento dentro do registro gráfico, utilizando o GeoGebra para visualizar as superfícies delimitadoras e compreender a estrutura geométrica do sólido. Ademais, mostraram fluência na conversão do registro gráfico para o algébrico, ao traduzirem os limites da região para uma integral tripla em coordenadas cilíndricas, como podemos perceber nos registros no estudante A8.

Figura 8: Registro do estudante A8

2.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas a partir de regiões do \mathbb{R}^3 .

Objetivo: Explorar uma região R descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral tripla que representa a medida de volume desta região usando coordenadas cilíndricas.

Abra o GeoGebra.

a) Plote a região S definida por $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = 0\}$.

- > Na guia exibir habilite a Janela de Visualização 3D e clique sobre ela.
- > Digite na linha de entrada $x^2 + y^2 = 4$.
- > Em seguida, digite $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- > Em seguida, digite $z = 0$.

b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?

$z = 0$

d) Utilize a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies** para encontrar a região R entre o plano xy e o cilindro.

- > Clique sobre a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies**, em seguida, clique sobre o cilindro e sobre o plano xy .

e) Qual a representação geométrica da região R ?

Uma circunferência

f) Qual equação representa a região R ?

$0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

g) Identifique os limites inferiores e superiores de r e θ .

em r limite inferior $= 0$ limite superior $= 2$
em θ limite inferior $= 0$ limite superior $= 2\pi$

h) Agora, observando a Janela de Visualização 3D, identifique os limites inferiores e superiores de z .

em z limite inferior $z = 0$ e limite superior $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

i) Com base nas respostas anteriores, escreva a integral tripla em coordenadas cilíndricas que representa o cálculo da medida do volume do sólido S .

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

No entanto, a maioria dos estudantes apresentou dificuldades significativas em pelo menos uma etapa da tarefa. Dois estudantes cometeram erros no tratamento do registro gráfico, representando as superfícies de forma imprecisa no GeoGebra. Um deles, por exemplo, não identificou corretamente a interseção entre o cilindro e o plano, o que

comprometeu toda a estrutura da solução. Esses erros sugerem uma falta de domínio na análise tridimensional, um aspecto que, segundo Cometti (2018), é frequentemente um ponto crítico no aprendizado de Integrais Múltiplas, especialmente quando envolve a visualização de sólidos.

Entre os estudantes que conseguiram representar corretamente a região no registro gráfico, muitos enfrentaram dificuldades na conversão para o registro algébrico. Três estudantes, embora tivessem compreendido a geometria do sólido, definiram limites inconsistentes para z , como atribuir valores fixos em vez de expressões dependentes de r . Esse tipo de erro reflete uma dificuldade em articular informações geométricas e algébricas, algo destacado por Duval (2009) como uma barreira comum na conversão entre registros.

A análise das resoluções também revela que o uso do GeoGebra, embora útil para a visualização inicial, nem sempre foi suficiente para superar as barreiras na conversão. Conforme Almeida (2021), o GeoGebra pode facilitar o tratamento dentro do registro gráfico ao permitir manipulações dinâmicas, mas sua eficácia depende de práticas de ensino que orientem explicitamente os estudantes sobre como integrar essas representações às formulações algébricas.

Entre os três estudantes que concluíram a tarefa com sucesso, é notável a habilidade em coordenar registros de forma integrada. Eles utilizaram o GeoGebra para identificar os limites do sólido, confirmaram esses limites visualmente e os traduziram para o registro algébrico, formulando a integral tripla.

Esses estudantes mostraram não apenas o domínio do tratamento nos registros gráficos e algébricos, mas também a fluência na conversão entre esses registros, evidenciando a compreensão conceitual necessária para lidar com integrais triplas em coordenadas cilíndricas.


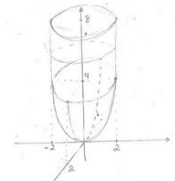
Por outro lado, os erros recorrentes nos registros dos outros estudantes destacam a importância de práticas de ensino que enfatizem a coordenação entre registros. Rocha (2019) argumenta que muitos estudantes falham em compreender as conexões entre representações geométricas e algébricas devido à falta de tarefas que articulem explicitamente essas relações. Isso é corroborado pelos erros observados na definição dos limites de z , que indicam uma dificuldade em interpretar a relação entre a geometria do sólido e a variação das coordenadas.

A Tarefa 2.2 desafiava os estudantes a interpretar uma integral tripla em coordenadas

cilíndricas, identificar a região tridimensional correspondente e representá-la no registro gráfico com a ajuda do GeoGebra. Essa tarefa exigia uma compreensão da relação entre os limites de integração e a geometria do sólido, além de habilidades para transitar entre os registros algébricos e gráficos, conforme descrito por Duval (2009). A tarefa envolvia tanto atividades de tratamento, quanto de conversões.

Os resultados evidenciam que, entre os oito estudantes, dois conseguiram completar a tarefa com precisão, identificando corretamente as regiões que limitam o sólido e representando a região tridimensional no GeoGebra. Esses estudantes mostraram habilidade no tratamento dentro do registro algébrico, interpretando os limites fornecidos pela integral. Além disso, eles realizaram com sucesso a conversão para o registro gráfico, utilizando o GeoGebra para visualizar a região como um sólido delimitado por um cilindro, um plano e um parabolóide, dentre eles destacamos os registros do estudante A4.

Figura 9: Registro do estudante A4

<p>2.2 Construído regiões de integração através de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas.</p> <p>Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração através de integrais triplas em coordenadas cilíndricas.</p> <p>Dada a integral tripla abaixo.</p> $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} r \, dz \, d\theta \, dr$ <p>a) Quais os limites de r, θ e z?</p> <p>$0 \leq z \leq 2$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $0 \leq r \leq 2$</p>	<p>b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S?</p> <p>Um plano</p> <p>c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S?</p> <p>Um parabolóide</p> <p>d) Utilize a ferramenta Interseção de Duas Superfícies para encontrar a região R entre o plano xy e o cilindro. O que essa região representa?</p> <p>Uma circunferência</p> <p>e) Represente algebricamente essa região, usando coordenadas cartesianas. Faça um esboço dessa região.</p> <p>$x^2 + y^2 = 4$</p> 	<p>f) Com a ajuda do GeoGebra e das suas respostas até aqui, faça um esboço do sólido S que originou a integral tripla acima.</p> 
--	--	---

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Entretanto, os estudantes apresentaram dificuldades significativas em diferentes etapas da tarefa. Esse erro reflete uma dificuldade no tratamento dentro do registro algébrico, especificamente na interpretação das relações condicionais expressas nos limites de integração. Conforme Duval (2009), o tratamento inadequado das informações algébricas compromete toda a conversão subsequente para o registro gráfico, como foi observado nas resoluções desses estudantes.

Os demais estudantes conseguiram identificar os limites de integração, mas apresentaram dificuldades no tratamento dos limites de z , de modo que não conseguiram perceber que um parabolóide limita inferiormente essa região, além de ficarem confusos quanto à intersecção dos sólidos. Conforme Duval (2009), o tratamento inadequado das

informações algébricas compromete toda a conversão subsequente para o registro gráfico, como foi observado nas resoluções desses estudantes.

Por outro lado, os dois estudantes que tiveram sucesso na tarefa mostraram fluência tanto no tratamento quanto na conversão. Eles utilizaram o GeoGebra para construir uma representação clara do sólido e verificaram visualmente a consistência entre os limites fornecidos e a geometria da região. Essa habilidade é descrita por Duval (2009) como um indicador de coordenação eficiente entre registros, essencial para a compreensão matemática.

Além disso, Rocha (2019) e Silva (2019) enfatizam que a coordenação entre registros requer práticas pedagógicas que articulem explicitamente as relações entre representações geométricas e algébricas. Essa necessidade é evidenciada pelos erros recorrentes na identificação dos limites de integração e pela dificuldade em compreender as interseções entre superfícies, apontando para uma lacuna nas estratégias de ensino que conectem essas representações de forma mais estruturada.

A Tarefa 3.1 desafiava os estudantes a formular uma integral tripla em coordenadas esféricas para calcular o volume de um sólido delimitado por uma esfera e um cone. Essa tarefa exigia que os estudantes analisassem a interação entre as superfícies envolvidas, identificassem os limites de integração e expressassem a integral correspondente no registro algébrico. A tarefa demandava tanto o tratamento dentro dos registros gráfico e algébrico quanto a conversão entre esses registros. Ficaram evidenciadas as dificuldades típicas apontadas por Duval (2009) na articulação entre múltiplos registros de representação semiótica.

Os resultados mostram que, entre os oito estudantes, três conseguiram formular corretamente a integral tripla completa, dentre eles o estudante A6. Esse estudante mostrou domínio no tratamento dentro do registro gráfico, utilizando o GeoGebra para representar visualmente o sólido como a interseção de uma esfera e de um cone. A partir dessa representação, realizou a conversão para o registro algébrico, identificando os limites de integração. A formulação correta da integral tripla refletiu uma coordenação bem-sucedida entre registros, que é, segundo Duval (2009), um aspecto crucial para a compreensão de conceitos avançados em matemática.

Figura 10: Registro do estudante A6

3.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas a partir de regiões do \mathbb{R}^3 .

Objetivo: Explorar uma região S descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral tripla que representa a medida de volume desta região usando coordenadas esféricas.

Abra o GeoGebra.

a) Plote a região S definida por $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

- Na guia exibir habilite a Janela de Visualização 3D e clique sobre ela.
- Digite na linha de entrada $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- Em seguida, digite $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?

Uma esfera, ou parte dela.

c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?

Um cone.

d) Para fazer uma análise dessa superfície em coordenadas esféricas vamos observar a variação dos limites superiores e inferiores dos parâmetros θ, ϕ e ρ . Para tanto acesse o link <https://www.geogebra.org/m/fj6pkvz7>.

Fazendo a variação, através dos controles deslizantes, dos parâmetros θ, ϕ e ρ , reflita sobre os limites inferiores e superiores desses parâmetros. Anote suas impressões.

Os limites de $\theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi$, em torno do eixo z .

" " $\phi \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \pi$, sobre eixo z .

" " $\rho \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 5$.

e) Com base nessas informações, construa a integral tripla em coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido S (Dica: ajuste os parâmetros do applet, de acordo a região S).

$$\iiint_S (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Entretanto, os outros cinco estudantes manifestaram dificuldades em diferentes etapas da tarefa. Três estudantes apresentaram representações gráficas imprecisas no GeoGebra, como a omissão do volume delimitado pela interseção ou a representação separada das superfícies sem considerar sua interação. Esse tipo de erro converge para limitações no tratamento dentro do registro gráfico, conforme observado por Cometti (2018), que destaca que a visualização de regiões tridimensionais é frequentemente problemática para estudantes, especialmente em situações que envolvem superfícies complexas como cones e esferas.

Além disso, dois estudantes cometeram erros na conversão do registro gráfico para o algébrico. Entre esses, dois definiram incorretamente os limites de integração, não levando em consideração a inclinação do cone que limita o sólido. Essa dificuldade em interpretar o limite de ϕ reflete uma falha em compreender como a geometria das superfícies se traduz nos limites de integração, uma barreira que, segundo Duval (2009), está diretamente relacionada à complexidade da conversão entre registros. Outros dois estudantes omitiram o fator jacobiano, comprometendo a integral tripla e indicando lacunas no tratamento dentro do registro algébrico.

Por fim, os erros recorrentes, como a definição inadequada de " ϕ " e a omissão do jacobiano, reforçam a necessidade de práticas de ensino que enfatizem a coordenação entre os registros gráfico e algébrico. Conforme Duval (2009), a conversão entre registros é a atividade cognitiva mais desafiadora no aprendizado matemático. Estratégias que combinem visualizações dinâmicas, como as proporcionadas pelo GeoGebra, com instruções detalhadas para a tradução das informações geométricas para o registro algébrico podem ser eficazes para

promover a fluência entre registros e, conseqüentemente, uma compreensão mais profunda dos conceitos relacionados às Integrais Múltiplas em coordenadas esféricas.

A Tarefa 3.2 desafiava os estudantes a interpretar uma integral tripla já formulada em coordenadas esféricas, identificar a região tridimensional correspondente e representá-la graficamente utilizando o GeoGebra. O objetivo principal era avaliar a capacidade de os estudantes converterem informações do registro algébrico para o gráfico.

Entre os oito estudantes, seis conseguiram concluir a tarefa de forma satisfatória, representando corretamente a região tridimensional correspondente à integral no GeoGebra, como podemos perceber nos registros no estudante A7.

Figura 11: Registro do estudante A7

3.2 Construindo regiões de integração através de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas. d) Com a ajuda do GeoGebra e das suas respostas até aqui, faça um esboço do sólido S que originou a integral tripla acima.

Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração através de integrais triplas em coordenadas esféricas.

Dada a integral tripla abaixo.

$$\int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

a) Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/jf8pkmz7>, ajuste os parâmetros de acordo a região S da integral dada.

b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?

Uma esfera

c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?

Um cone

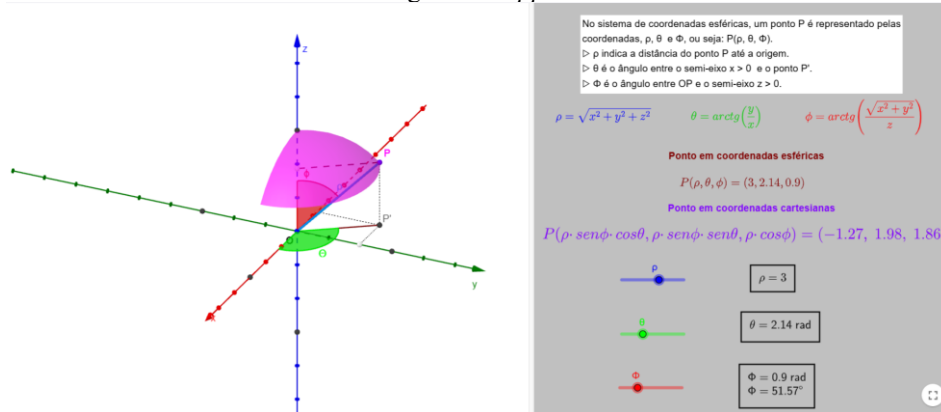
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Esse estudante mostrou domínio na interpretação dos limites de integração que definiam uma região delimitada por uma esfera e um cone. Ele traduziu essas informações para o registro gráfico ao construir o sólido no GeoGebra. Esse processo reflete uma habilidade eficaz em realizar a conversão entre registros, característica fundamental para o aprendizado matemático avançado, segundo Duval (2009).

Seis estudantes concluíram essa tarefa com sucesso, um dos fatores que pode ter contribuído para esse resultado é o uso do *applet*⁹ do GeoGebra, exemplificado na Figura 9, pois com ele os estudantes conseguiram, com a ajuda dos controles deslizantes, definir no registro gráfico os limites de integração identificados na integral dada. Os outros dois estudantes não fizeram nenhum tipo de registro nessa tarefa.

⁹ <https://www.geogebra.org/m/vwyu8m9u>

Figura 12: Applet



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Os dados coletados no questionário entregue aos estudantes após a sequência de tarefas fornecem informações que complementaram a análise das tarefas realizadas. De forma geral, os participantes destacaram que o uso do GeoGebra foi importante para facilitar a visualização das regiões de integração e facilitar a compreensão da relação entre representações algébricas e gráficas. Um dos estudantes interessados:

A experiência de interpretação gráfica de regiões de integração com o auxílio do GeoGebra foi muito interessante, pois visualizar geometricamente o que está acontecendo facilita bastante a compreensão. (A1, Questionário, 2024)

Outro estudante destacou que

[...] utilizei o GeoGebra durante praticamente toda minha graduação, principalmente nas disciplinas de Cálculo, entretanto, admito que ajudou muito na maneira como visualizo as regiões de integração pois havia meses que não fazia atividades sobre integrais e apenas com as questões propostas e fazendo as construções no GeoGebra pude resgatar os conceitos de integral dupla e tripla. (A8, Questionário, 2024)

Por outro lado, algumas dificuldades foram identificadas. Apesar de a maioria dos participantes relatar alguma familiaridade com o aplicativo, foi mencionada a necessidade de uma introdução mais específica às funcionalidades peculiares do GeoGebra para evitar dificuldades iniciais. Além disso, como apontado por um estudante, seria útil incluir explicações mais detalhadas sobre o papel do jacobiano:

Se possível, trazer questionamentos que ficam na teoria, como por exemplo o "jacobiano", apesar de já ter feito a disciplina Cálculo 3 e ter um certo domínio com o GeoGebra nunca procurei uma interpretação para o "jacobiano" e nem faço ideia "de onde ele se encaixaria". (A4, Questionário, 2024)

Quanto aos avanços, os participantes relataram melhorias na interpretação e formulação de Integrais Múltiplas, especialmente ao transitar entre os registros gráficos e algébricos.

Com o auxílio do GeoGebra, a compreensão melhorou bastante, pois é possível ver graficamente o que está acontecendo. Isso ajuda a entender não apenas as regiões de integração, mas também as mudanças de integração específicas dessas regiões e os limites das integrais. Essa visualização dinâmica tornou o conceito mais intuitivo e acessível. (A4, Questionário, 2024)

Comparando com os dados do teste diagnóstico, observou-se que as dificuldades relacionadas à visualização tridimensional e à definição de limites de integração foram, em parte, superadas, principalmente, quando o GeoGebra foi utilizado para explorar as relações de maneira interativa.

3.6 Considerações finais

O estudo teve como objetivo *analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação, sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas*. Nesse contexto, buscou-se compreender como os estudantes alternam os registros algébricos e gráficos e como essa articulação contribui para a compreensão de conceitos matemáticos. O aplicativo GeoGebra foi utilizado como ferramenta pedagógica de forma a potencializar o processo de aprendizagem, promovendo visualizações dinâmicas e interativas.

As contribuições do estudo evidenciam como os pressupostos da Engenharia Didática influenciaram o plano e a implementação da sequência de tarefas. Desde o início da investigação, explicitada nos artigos anteriores, a análise prévia possibilitou identificar as principais dificuldades manifestadas pelos estudantes, como a visualização de regiões tridimensionais e a conversão entre registros de representação semiótica. Essas informações orientaram a elaboração das tarefas na fase de análise *a priori*, garantindo que as tarefas fossem planejadas com base em evidências coletadas no teste diagnóstico e na revisão de literatura. Durante uma análise *a posteriori*, os dados obtidos permitiram avaliar as estratégias

utilizadas pelos estudantes, validando as hipóteses levantadas anteriormente e apontando aspectos que precisam de ajustes.

A integração entre a TRRS e ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, destacou-se como um recurso eficiente para abordar barreiras cognitivas relacionadas à transição entre diferentes registros de representação. A TRRS trouxe o suporte teórico necessário para entender como os estudantes manipulam e convertem representações algébricas, gráficas e geométricas, enquanto o GeoGebra proporcionou uma plataforma interativa para a visualização dinâmica e exploração de conceitos complexos. Durante a implementação da sequência de tarefas, foi possível observar que a utilização do GeoGebra auxiliou na construção de representações gráficas e na interpretação de limites de integração, contribuindo para que os estudantes superassem parte das dificuldades apontadas nas fases anteriores da pesquisa.

Foram identificados desafios persistentes, como a dificuldade de alguns estudantes na transição do registro gráfico para o algébrico. Esses resultados ressaltam a importância de uma mediação pedagógica efetiva, em que o professor atue como facilitador na construção de conexões entre os diferentes registros e na superação de dificuldades conceituais.

Com base nos resultados, algumas recomendações didáticas podem ser propostas para professores que atuam no ensino de Cálculo Integral e áreas afins. Primeiramente, os professores podem incorporar recursos tecnológicos, como o GeoGebra, de forma planejada, utilizando essas ferramentas para promover a articulação entre registros de representação semiótica. A realização de tarefas que envolvem tanto a visualização quanto a formulação algébrica pode ser uma boa estratégia para fortalecer a compreensão dos conceitos matemáticos. Recomenda-se também que os professores dediquem momentos específicos para discutir o significado geométrico de elementos como o jacobiano, esclarecendo seu papel nas mudanças de variáveis. Além disso, estratégias que estimulam a participação ativa dos estudantes, como trabalhos em grupo, podem favorecer a troca de ideias e a construção colaborativa do conhecimento.

Para pesquisas futuras, sugere-se uma exploração de outras ferramentas digitais que

possam complementar ou expandir as possibilidades oferecidas pelo GeoGebra no ensino de Integrais Múltiplas e Mudanças de Coordenadas. Investigações que analisam o impacto do tempo de exposição às tarefas propostas no desenvolvimento da habilidade de transitar entre registros de representação também podem ser relevantes. Outra linha de estudo seria a análise de práticas pedagógicas colaborativas, avaliando como o trabalho em grupo pode contribuir para a superação de dificuldades relacionadas à conversão entre registros de representação. Além disso, seria interessante investigar o uso de metodologias que integrem aspectos teóricos e práticos de forma contínua, promovendo ciclos iterativos de avaliação e aprimoramento.

Destacamos a importância de considerar os fatores afetivos e motivacionais no plano de práticas pedagógicas. Durante a implementação da proposta, aconselhamos que os estudantes tivessem maior engajamento ao interagir com o GeoGebra, especialmente quando perceberam avanços na compreensão dos conceitos e puderam visualizar os resultados de forma dinâmica. Esses aspectos indicam que o uso de tecnologias, aliado a abordagens que valorizam a autonomia e a interação entre os participantes, pode favorecer o aprendizado de conteúdos matemáticos. Incorporar momentos de reflexão sobre os avanços obtidos e criar um ambiente acolhedor e motivador pode contribuir significativamente para o envolvimento dos estudantes e para o sucesso das estratégias pedagógicas propostas.

Em suma, o estudo reafirma a relevância da Engenharia Didática como metodologia para estruturar o ensino de conteúdos matemáticos, como as Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas. Reafirma, ainda, a combinação de recursos tecnológicos com fundamentos teóricos bem estabelecidos, como o TRRS que se apresenta como uma abordagem promissora para transformar o ensino de Matemática, em particular do Cálculo Integral, em uma experiência com mais significado para os estudantes, integrando teoria, prática e tecnologia de maneira eficiente e acessível.

Por fim, o estudo contribui para o campo da Educação Matemática ao oferecer subsídios teóricos e práticos para o ensino de Integrais Múltiplas, reforçando o papel das tecnologias digitais como aliadas na construção do conhecimento.

3.7 Referências

ALMEIDA, Carolina Ribeiro de. *Gestão de Tarefas e Desenvolvimento de Crivos de Superfícies Utilizando o software Maple*: Uma Proposta para o estudo de Cálculo de Integrais

Múltiplas no Ensino Superior. 2021 206 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Estadual De Santa Cruz. Ilhéus.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didáctica, In: BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-364.

COMETTI, Antônio Márcio. *Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no cálculo de várias variáveis*: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem. 2018. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma*: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus, 2003. p.11-33.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MOTA, Janine Freitas. *Um estudo ontossemiótico sobre os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática*. 2021. 291f Tese (Doutorado em Educação Matemática) Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática; uma análise da influência francesa*. Autentica. 2 ed. Belo Horizonte, 2011.

PAVANELO, Elisângela.; LIMA, Renan. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 31, n. 58, p. 739–759, 2017.

RAGONI, Vitor Ferreira. 2021. *Expandindo telas e contando experiências em educação matemática com o geogebra*: da sensibilidade do toque à produção de conceitos de integrais duplas com o smartphone. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande.

ROCHA, Fredson Valois Coutinho da. *A utilização do GeogGebra no estudo dos conceitos de limite, derivada e integral definida*. 2019 96 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Vale do São Francisco. Rio de



Janeiro.

SILVA, Rodrigo Tavares da. *Atividades para o estudo de integrais em um ambiente de ensino híbrido*. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina.

STEWART, James. *Cálculo: volume 2*. Tradução: EZ2 Translate. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THIEGHI, Leila Thomazelli. Utilização do aplicativo “Waze” no cálculo de distância através da integral definida. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 43, p. e20210020, 2021.

CONSIDERAÇÕES

A pesquisa apresentada nesta dissertação teve como objetivo geral *investigar como uma abordagem pedagógica, fundamentada nos pressupostos dos Registros de Representação Semiótica e apoiada pelo GeoGebra, pode contribuir para os processos do ensino e de aprendizagem de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, no contexto do Cálculo Integral*. Para isso, organizamos a dissertação em três artigos que abordam diferentes dimensões dessa problemática. Em cada um dos artigos relatamos estudos que buscou cumprir cada um dos objetivos específicos, quais sejam: (i) Analisar o emprego de Tecnologias Digitais no ensino de Mudanças de Coordenadas em Integrais Múltiplas, em produções acadêmicas, com foco nas dificuldades relatadas sobre os processos de ensino e de aprendizagem; (ii) Analisar dificuldades evidenciadas por estudantes, a partir de um teste diagnóstico, na mudança de registros de representação semiótica em tarefas que envolvem Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas; e (iii) Analisar conhecimentos mobilizados por estudantes ao resolver uma sequência de tarefas, que utiliza diferentes registros de representação, sobre Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas.

No primeiro artigo, foi realizada uma revisão sistemática da literatura, evidenciando que a Mudança de Coordenadas em Integrais Múltiplas é um tema central e desafiador, frequentemente relacionado à dificuldade de visualização e articulação entre registros semióticos. Ainda, ficou evidenciado o uso limitado de tecnologias digitais e a dificuldade de transição entre diferentes sistemas de coordenadas. A revisão analisou onze produções acadêmicas e destacou que as ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, permitem maior visualização e interatividade no ensino. No entanto, também ficou evidente a carência de formação docente voltada ao uso dessas tecnologias e a necessidade de contextualizar as tarefas para facilitar a compreensão dos estudantes. Ademais, observou-se que uma abordagem pedagógica que articule a visualização geométrica com o raciocínio algébrico pode mitigar algumas das dificuldades relatadas.

O segundo artigo focou no emprego de um teste diagnóstico para identificar as dificuldades dos estudantes ao trabalhar com Mudanças de Coordenadas. A análise mostrou que os doze estudantes participantes enfrentam desafios tanto na interpretação dos registros semióticos quanto na mobilização de conhecimentos elementares de Matemática relacionados à visualização de sólidos tridimensionais e à conversão entre registros de representação semiótica. Destacou-se também que a dificuldade de visualizar e interpretar conceitos é um dos principais entraves para a aprendizagem do Cálculo Integral. Os resultados mostram como as dificuldades relatadas pelos estudantes corroboram as evidências da literatura, apontando que a combinação entre o suporte visual do GeoGebra e a mediação pedagógica pode favorecer a compreensão e a resolução de problemas envolvendo Integrais Múltiplas. A partir desses dados, foi desenvolvida uma sequência de tarefas, elaborada com base na TRRS, para promover a transição entre diferentes representações e facilitar a compreensão do conceito de Mudança de Coordenadas.

Com base no teste diagnóstico proposto aos estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, foi possível observar que a maioria dos estudantes apresentou dificuldades ao transitar entre registros, particularmente ao converter representações gráficas em expressões algébricas completas. Essas dificuldades foram mais evidentes em tarefas que planejavam a construção de integrais triplas com coordenadas cilíndricas ou esféricas, devido à complexidade envolvida na interpretação e na formulação de limites de integração. Apesar disso, foi identificado que estudantes com maior domínio no tratamento de registros gráficos encontraram maior facilidade em compreender as relações geométricas e formular integrais mais consistentes.

O terceiro artigo apresentou a implementação dessa sequência de tarefas, integrando as Tecnologias Digitais ao processo de ensino. A experimentação mostrou que o uso do GeoGebra, aliado à TRRS, potencializou a compreensão de conceitos, por meio da visualização, promovendo uma melhor reflexão por parte dos oito estudantes participantes da pesquisa, pois permitiu que eles manipulassem visualmente objetos matemáticos, facilitando a compreensão de sólidos geométricos e seus limites de integração. Além disso, os resultados indicam que a interação entre registros de representação semiótica contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a superação de dificuldades previamente identificadas no teste diagnóstico. Entre os avanços evidenciados, destacam-se a ampliação da capacidade dos estudantes em alternar diferentes representações e a melhoria na interpretação

de limites de integração em coordenadas cilíndricas e esféricas. O estudo mostra que o uso de tecnologias digitais como o GeoGebra está diretamente relacionado à mediação pedagógica, pois não é suficiente introduzir ferramentas tecnológicas sem que o professor oriente os estudantes quanto ao seu uso. Nesse sentido, o professor tem um papel essencial em guiar os estudantes na utilização eficaz das tecnologias para promover a aprendizagem e a reflexão matemática.

De forma geral, os estudos referentes aos três artigos convergem para evidenciar a relevância de uma abordagem pedagógica que integre recursos tecnológicos e teorias cognitivas, como a TRRS, no ensino do Cálculo Integral. Contudo, os resultados também evidenciam desafios, como a necessidade de formação continuada dos professores, o acesso desigual às tecnologias e a importância de fortalecer os conhecimentos elementares de conceitos da Matemática ensinada aos estudantes na Educação Básica.

Diante disso, sugerem-se algumas opções para pesquisas futuras: investigações adicionais podem explorar a adaptação das tarefas para diferentes níveis de ensino e perfis de estudantes, incluindo contextos em que os conhecimentos elementares de Matemática sejam explorados no início da sequência de tarefas, como aspectos da Geometria Analítica. Também seria relevante avaliar o impacto das intervenções pedagógicas de longo prazo, com maior número de encontros e ciclos iterativos de ajustes, para verificar como essas práticas influenciam a coordenação entre registros ao longo do tempo. Além disso, novas pesquisas podem analisar, comparativamente, o uso de diferentes ferramentas tecnológicas no ensino do Cálculo Integral, considerando não apenas o desempenho acadêmico dos estudantes nas tarefas, mas também aspectos como acessibilidade e engajamento dos estudantes.

A Engenharia Didática, utilizada como metodologia de base na pesquisa, proporcionou contribuições ao oferecer um arcabouço sistemático para o plano, a implementação e a avaliação da sequência de tarefas. Sua abordagem permitiu articular as evidências teóricas com a prática pedagógica, possibilitando a identificação e superação de dificuldades específicas dos estudantes. Além disso, ao estruturar as tarefas de maneira iterativa e fundamentada em análises prévias, a Engenharia Didática garantiu uma validação das intervenções pedagógicas. Esperamos que a pesquisa inspire outras iniciativas que busquem

integrar Tecnologias Digitais ao ensino de Matemática, promovendo uma aprendizagem mais acessível e contextualizada.

Por fim, recomenda-se ampliar o foco para o desenvolvimento de estratégias colaborativas entre os estudantes, promovendo a troca de conhecimentos e o aprendizado em grupo como formas de enriquecer o entendimento conceitual e superar barreiras cognitivas. Além disso, é necessário investimento na formação dos professores e na disponibilização de infraestrutura tecnológica. É importante garantir melhores condições de trabalho para que os professores tenham tempo para formação continuada, para estudar as tecnologias, para acompanhar de perto o desenvolvimento dos estudantes e para planejar suas aulas. Ademais, a redução do número de alunos por turma e a valorização salarial são aspectos que devem ser considerados para que os professores possam desempenhar seu papel com qualidade.

Com isso, esperamos que as contribuições da pesquisa sirvam como base para o aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino de Mudanças de Coordenadas e para o avanço das investigações no campo da Educação Matemática, ampliando o escopo de análise para outros conteúdos do Cálculo Integral e verificando o impacto a longo prazo no desempenho acadêmico e profissional dos estudantes.

APÊNDICES

Apêndice 1

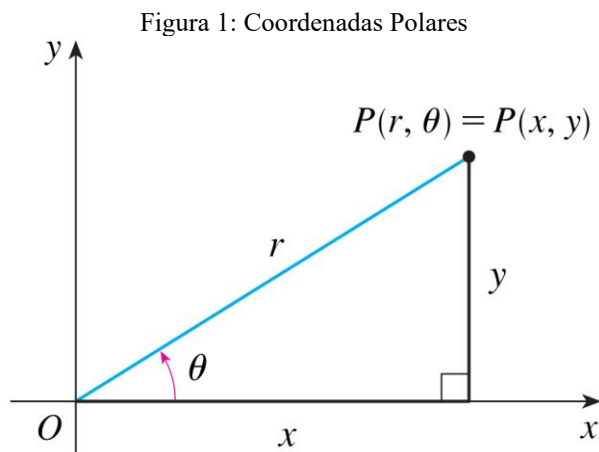
Prefácio

Integrais Duplas em Coordenadas Polares: Um ponto P com coordenadas retangulares (x, y) , tem coordenadas polares (r, θ) , onde r é a distância do ponto P à origem e θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga a origem a P .

Consideremos a Mudança de Coordenadas dada por

$$g: \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

onde $r \geq 0$ e θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$.



Fonte: Stewart (2013).

O jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Então,

$$\iint_{g(Q)} f(x, y) dx dy = \iint_Q f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

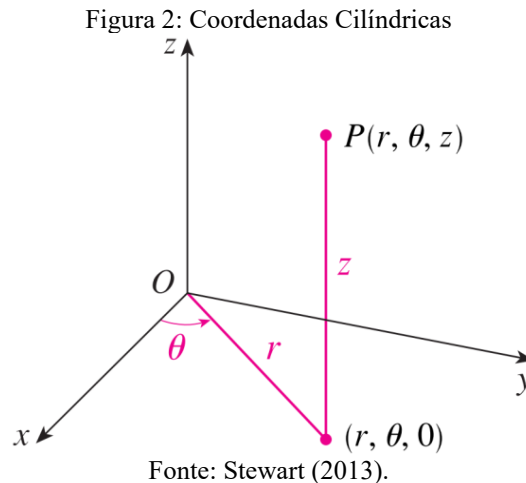
Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas: Um ponto P de coordenadas (x, y, z) tem

coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy .

Consideremos a Mudança de Coordenadas dada por

$$g: \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

onde $r \geq 0$, θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ e $-\infty < z < +\infty$.



O jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Então,

$$\iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_Q (r \cos\theta, r \sin\theta, z) r dr d\theta dz.$$

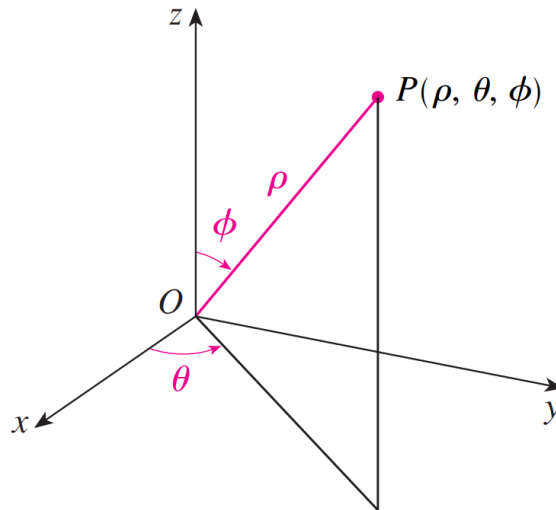
Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas: Um ponto P de coordenadas retangulares (x, y, z) tem coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) , onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga $(0,0)$ a (x, y) , e ϕ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos z e o segmento de reta que liga P à origem.

Consideremos a Mudança de Coordenadas dada por

$$g: \begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

onde $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e θ varia num intervalo da forma $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$.

Figura 3: Coordenadas Esféricas



Fonte: Stewart (2013)

O jacobiano da aplicação g é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \text{sen}\phi \cos\theta & -\rho \text{sen}\phi \text{sen}\theta & \rho \cos\phi \cos\theta \\ \text{sen}\phi \text{sen}\theta & \rho \text{sen}\phi \cos\theta & \rho \cos\phi \text{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho \text{sen}\phi \end{vmatrix} = \rho^2 \text{sen}\phi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iiint_{g(Q)} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_Q f(\rho \text{sen}\phi \cos\theta, \rho \text{sen}\phi \text{sen}\theta, \rho \cos\phi) \rho^2 \text{sen}\phi \, d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Apêndice 2

ATIVIDADE: DIAGNÓSTICO DE HABILIDADES NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES QUE ENVOLVEM CÁLCULO COM VÁRIAS VARIÁVEIS

Acadêmico: _____ Semestre: _____

Data: ____/____/____

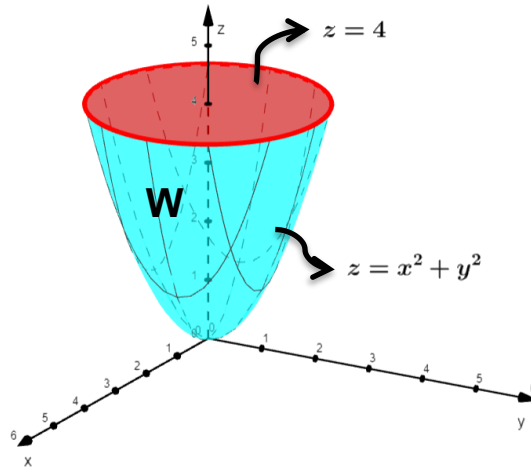
1. Sendo R a região do plano cartesiano que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. Calcule

$$\iint_R x + y \, dA$$

2. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste a oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina.
3. Seja W uma região limitada pelos planos $z = -2$, $z = 4$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$. Calcule

$$\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$$

4. Determine por integral tripla, o volume do sólido W :



5. Qual o volume do sólido limitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e abaixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$?

Apêndice 3

SEQUÊNCIA DE TAREFAS – MUDANÇA DE COORDENADAS EM INTEGRAIS MÚTIPLAS

Acadêmico: _____ Semestre: _____

Data: ____/____/____

Tarefa 1

1.1 Construindo Integrais Duplas em Coordenadas Polares a partir de regiões do \mathbb{R}^2 .

Objetivo: Explorar uma região R descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral dupla que representa a medida da área desta região usando coordenadas polares.

Abra o GeoGebra.

- No GeoGebra plote a região R definida por $R = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
 - Digite na linha de entrada $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
- Agora, faça um esboço dessa região no espaço abaixo.
- Reescreva a equação que define a região R utilizando coordenadas polares.

Para tanto, inicialmente vamos explorar o *applet* disponível no link <https://www.geogebra.org/m/uwhaw37x>.

Fazendo a variação por meio dos controles deslizantes, do raio r e do ângulo θ da superfície representada, reflita sobre os limites inferiores e superiores desses parâmetros. Anote suas impressões.

- Em relação a região R , determine os limites inferiores e superiores de r e θ .
 - Escreva a integral dupla que calcula a área da região R .

1.2 Construindo regiões de integração a partir de Integrais Duplas em Coordenadas Polares.

Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração por meio de integrais duplas em

coordenadas polares.

Dada a integral dupla abaixo:

$$\int_0^{2\pi} \int_4^9 r dr d\theta$$

Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S , com o auxílio do GeoGebra.

- Quais os limites inferiores e superiores de r e θ ?
- Determine a(s) expressão(ões) que define(m) a região S .
- Com o auxílio do GeoGebra faça o esboço do sólido S .

Tarefa 2

2.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas a partir de regiões do \mathbb{R}^3 .

Objetivo: Explorar uma região R descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral tripla que representa a medida de volume desta região usando coordenadas cilíndricas.

Abra o GeoGebra.

- Plote a região S definida por $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = 0\}$.
 - Na guia **exibir** habilite a **Janela de Visualização 3D** e clique sobre ela.
 - Digite na linha de entrada $x^2 + y^2 = 4$.
 - Em seguida, digite $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
 - Em seguida, digite $z = 0$.
- Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?

- c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?
- d) Utilize a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies** para encontrar a região R entre o plano xy e o cilindro.
- Clique sobre a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies**, em seguida, clique sobre o cilindro e sobre o plano xy .
- e) Qual a representação geométrica da região R ?
- f) Qual equação representa a região R ?
- g) Identifique os limites inferiores e superiores de r e θ .
- h) Agora, observando a **Janela de Visualização 3D**, identifique os limites inferiores e superiores de z .
- i) Com base nas respostas anteriores, escreva a integral tripla em coordenadas cilíndricas que representa o cálculo da medida do volume do sólido S .

2.2 Construindo regiões de integração por meio de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas.

Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração por meio de integrais triplas em coordenadas cilíndricas.

Dada a integral tripla abaixo.

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^8 r dz d\theta dr$$

- a) Quais os limites de r , θ e z ?
- b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?
- c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?
- d) Utilize a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies** para encontrar a região R entre o plano xy e o cilindro. O que essa região representa?

- e) Represente algebricamente essa região, usando coordenadas cartesianas. Faça um esboço dessa região.
- f) Com a ajuda do GeoGebra e das suas respostas até aqui, faça um esboço do sólido S que originou a integral tripla acima.

Tarefa 3

3.1 Construindo Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas a partir de regiões do \mathbb{R}^3 .

Objetivo: Explorar uma região S descrita em coordenadas cartesianas analisando a variação de seus parâmetros e escrever a integral tripla que representa a medida de volume desta região usando coordenadas esféricas.

Abra o GeoGebra.

- a) Plote a região S definida por $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
- Na guia **exibir** habilite a **Janela de Visualização 3D** e clique sobre ela.
 - Digite na linha de entrada $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 - Em seguida, digite $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- b) Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?
- c) Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?
- d) Para fazer uma análise dessa superfície em coordenadas esféricas vamos observar a variação dos limites superiores e inferiores dos parâmetros θ , ϕ e ρ . Para tanto acesse o link <https://www.geogebra.org/m/jf6pkmz7>.
Fazendo a variação, através dos controles deslizantes, dos parâmetros θ , ϕ e ρ , reflita sobre os limites inferiores e superiores desses parâmetros. Anote suas impressões.
- e) Com base nessas informações, construa a integral tripla em coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido S (**Dica:** ajuste os parâmetros do *applet*, de acordo a

região S).

3.2 Construindo regiões de integração por meio de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas.

Objetivo: Explorar a construção de regiões de integração por meio de integrais triplas em coordenadas esféricas.

Dada a integral tripla abaixo.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^5 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta$$

- Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/jf6pkmz7>, ajuste os parâmetros de acordo a região S da integral dada.
- Qual é a superfície que limita superiormente o sólido S ?
- Qual é a superfície que limita inferiormente o sólido S ?
- Com a ajuda do GeoGebra e das suas respostas até aqui, faça um esboço do sólido S que originou a integral tripla acima.

Apêndice 4

QUESTIONÁRIO FINAL: MUDANÇA DE COORDENADAS EM INTEGRAIS MÚTIPLAS

1. Como você descreveria a experiência de interpretação gráfica de regiões de integração com o auxílio do GeoGebra? Foi intuitivo?
2. Após participar deste projeto, como você avalia o uso de *softwares* no ensino de Cálculo de Várias Variáveis? Quais são, em sua opinião, os principais benefícios e desafios?
3. Como você avalia a integração entre as atividades teóricas e as atividades práticas com o GeoGebra? Algum aspecto poderia ser ajustado para melhorar essa conexão?
4. Você viu alguma mudança na forma como compreende ou aplica Integrais Múltiplas, sobretudo na Mudança de Coordenadas, após o uso do GeoGebra? Detalhe.
5. Houve momentos em que o uso do GeoGebra dificultou sua aprendizagem em conteúdos de Integrais Múltiplas? Se sim, descreva os aspectos e as possíveis causas.
6. Gostaria de sugerir melhorias para a sequência de tarefas ou a forma como elas foram realizadas? Compartilhe suas ideias.